



國立臺北科技大學
National Taipei University of Technology

光電工程系
專題論文

米氏理論在白光 LED 螢光模擬之應用
The Application of Mie Scattering Theory
on White LED Fluorescence Simulation

學生：劉正硯

指導教授：林世穆 光學博士

中華民國 一〇三年 六月

摘要

論文名稱：米氏理論在白光 LED 螢光模擬之應用

頁數:71

校所別：國立台北科技大學光電工程系

學生：劉正硯

指導教授：林世穆 光學博士

關鍵詞：米氏理論、白光 LED、LED 中螢光粉層模擬

本研究以光寶 LTW-5630 系列 LED 的尺寸與物理學報所要求的參數作為使用軟體模擬時的設計參數，一開始先對螢光粉的參數作一定的了解後，再針對螢光粉濃度對散射特性的影響、螢光粉散射特性對出光效率的影響及螢光粉散射特性對空間色溫分布的影響進行模擬。

致謝

在修習專題這門課程中，非常感謝指導教授林世穆博士的指導，從題目的選擇開始，就讓我對於光學設計的世界有更廣的視野與實用性。

從著手學習 LightTools、針對學報的 Case 進行探討到撰寫論文，短短不到半學期的時間，遇到了無數的瓶頸，過程中所幸有學長花頌揚與學弟黃煒智的幫助，一路解決了許多問題。也感謝班上同學的關心與支持，雖然製作的專題不同，遇到的瓶頸也不同，但卻還是可以彼此鼓勵，並且一同分享，一同成長。

教授對於光學模擬與設計的熱忱，著實深深影響著我。跟著老師學習，讓我能將眼光放遠於未來，然後補足自己的不足，並且鞏固光學的理論基礎。未來也期許自己，能盡自己的能力，發揮最大的潛力，為社會貢獻一份心力。

最後，我想感謝我的家人，在我身心俱疲時，讓我覺得我還有一個溫暖的家、一個永遠支持你的家。

劉正硯

謹誌於 國立台北科技大學 光電工程系

中華民國 一〇三年 六月。

目錄

摘要.....	I
致謝.....	II
目錄.....	III
圖目錄.....	VII
表目錄.....	X
第一章 前言.....	1
1-1 研究背景[1][2].....	1
1-1.1 藍光 LED 加黃色螢光粉.....	2
1-1.2 藍光 LED 加上黃色(或綠色)與紅色螢光粉.....	2
1-1.3 紫外光 LED 加上藍色、綠色與紅色螢光粉.....	2
1-1.4 螢光粉塗佈結構.....	3
1-2 研究動機.....	4
1-3 研究目的.....	4
1-4 論文架構.....	4
第二章 光散射理論[3].....	5
2-1 簡介.....	5
2-2 米氏散射理論.....	6
2-2.1 基本假設.....	6
2-2.2 廣義的散射光振幅方程式.....	6
2-2.3 米氏解.....	8

2-2.4	Generalised Lorenz-Mie theory	9
2-3	幾何光學散射理論	11
2-3.1	基本假設	11
2-4	散射光強	12
2-4.1	菲涅耳係數	12
2-4.2	曲率所造成的能量散逸	13
2-4.3	散射振幅函數	16
2-5	相位	16
2-5.1	由反射造成的相位改變	17
2-5.2	由焦點造成的相位改變	17
2-5.3	由於光程差所造成的相位差	19
2-6	幾何光學的散射振幅函數	21
2-6.1	反射($p=0$)	21
2-6.2	折射($p=1$)	21
2-6.3	高階模態($P>1$)	22
2-6.4	幾何光學與米氏理論間的比較	22
2-7	散射模式的特點	26
2-7.1	反射模式($p=0$):布魯斯特角與全反射角	26
2-7.2	折射模式($p=1$):臨界角	26
2-7.3	一次內部反射模式($p=2$):彩虹角	27
2-8	碰撞點	27

2-8.1 粒子的反射.....	28
2-8.2 粒子的折射.....	29
2-8.3 前兩種散射模態的干涉.....	30
2-9 總結.....	32
第三章 色度學[4].....	33
3-1 CIE 標準色度系統.....	33
3-1.1 CIE 1931 XYZ 色度系統.....	33
3-2 均等色彩空間.....	37
3-2.1 CIE 1960 UCS 色度圖.....	38
3-3 色溫與相關色溫.....	39
3-4 演色性.....	43
3-4.1 色票.....	44
第四章 LightTools 螢光粉層模擬[5].....	47
4-1 螢光粉.....	47
4-2 LightTools 中的螢光粉.....	51
4-3 光線追跡的的功率平衡.....	51
4-4 使用激發光譜時的功率平衡.....	52
4-5 使用量子產率時的功率平衡.....	52
4-6 在 LightTools 的使用者介面中建立螢光粉材料.....	53
4-6.1 新增使用者材料.....	53
4-6.2 新增螢光粉粒子.....	55

4-6.3 設定螢光粉粒子參數.....	56
第五章 LED 中螢光粉特性模擬.....	66
5-1 螢光粉濃度對散射特性的影響.....	67
5-2 螢光粉散射特性對出光效率的影響.....	68
5-3 螢光粉散射特性對空間色溫分布的影響.....	69
第六章 結論.....	70
參考文獻.....	71

圖目錄

圖 1-1 單晶片型白光發光二極體.....	1
圖 1-2 LED 照片與其照射物之差異.....	3
圖 1-3 三種螢光粉塗佈結構示意圖.....	4
圖 2-1 入射波與散射波的電場向量分解圖.....	7
圖 2-2 自直徑為 20.14MM 之水滴散射光強分布圖.....	10
圖 2-3 自直徑為 10MM 之粒子所得的光強樣式.....	10
圖 2-4 水滴的光線追跡.....	11
圖 2-5 反射係數與入射角.....	13
圖 2-6 與氣泡同軸的無限細管狀光束的反射與折射.....	14
圖 2-7 反射與散射的偏差角度.....	15
圖 2-8 幾何光線經 P-1 次內部反射後，穿過 $M=4/3$ 的水滴，其出射角 θ_P 與入射角 T 的關係圖及參數 K,Q,S 的定義.....	18
圖 2-9 由路徑不同所造成的相位改變(相對於參考光).....	19
圖 2-10 粒子反射的強度圖。(A)垂直極化(B)水平極化.....	23
圖 2-11 粒子折射的強度圖。(A)垂直極化(B)水平極化.....	23
圖 2-12 折射模式與反射模式的強度比。(A)垂直極化(B)水平極化.....	24
圖 2-13 前四種模態的光強。(A)垂直極化(B)水平極化.....	24
圖 2-14 比較由米氏理論計算與幾何光學的四種模態加總的光強分布.....	25
圖 2-15 比較由米氏理論計算的光強分布與由幾何光學的繞射、反射、折射所計算的光強分布。(A)垂直極化(B)水平極化.....	25
圖 2-16 前三種散射模式之散射角與折射率的關係.....	26
圖 2-17 (A)反射定律(B)折射定律.....	28
圖 2-18 楊氏實驗原理.....	31
圖 3-1 配色實驗示意圖.....	34

圖 3-2 配色實驗側面圖	34
圖 3-3 XYZ 色度系統的配色函數 $x\lambda$ 、 $y\lambda$ 、 $z\lambda$	35
圖 3-4 CIE-1931 色度圖	37
圖 3-5 CIE 1931 色度圖上麥克爾當橢圓(放大 10 倍).....	38
圖 3-6 CIE 1960 UCS 色度圖	39
圖 3-7 黑體輻射圖	41
圖 3-8 CIE 1960 UCS 色度圖黑體軌跡及等色溫線.....	42
圖 3-9 CIE 1931 色度圖黑體軌跡及等色溫線.....	42
圖 3-10 色票 No.1~No.4 的反射頻譜.....	45
圖 3-11 色票 No.5~No.8 的反射頻譜.....	46
圖 3-12 色票 No.9~No.12 的反射頻譜.....	46
圖 3-13 色票 No.13~No.15 的反射頻譜.....	46
圖 4-1 電子能帶圖	47
圖 4-2 光至發光過程	48
圖 4-3 LIGHTTOOLS 預設的激發光譜	49
圖 4-4 LIGHTTOOLS 預設的發射光譜.....	50
圖 4-5 新增使用者材料	54
圖 4-6 新增光粉粒子.....	55
圖 4-7 點選螢光粒子即可顯示其各項參數.....	56
圖 4-8 平均自由程的設定可以選擇常數、相依波長或根據 MIE 理論	57
圖 4-9 MIE 頁籤中需設定粒子數密度與折射率	57
圖 4-10 在 MIE 粒子大小頁籤中，設定粒子大小的分布	58
圖 4-11 與波長相依的平均自由程設定	59
圖 4-12 吸收光譜頁籤	60
圖 4-13 螢光粉的激發、發射與吸收光譜.....	60

圖 4-14 激發光譜頁籤.....	61
圖 4-15 量子產率頁籤.....	61
圖 4-16 發射光譜頁籤.....	62
圖 4-17 插入一個新的發射光譜.....	63
圖 4-18 為偏轉光線的密度分布選項.....	64
圖 4-19 設定使用者自訂強度分布.....	64
圖 4-20 未轉換密度的散射角度圖示.....	65
圖 4-21 或然率分光選項可以控制有多少光線從螢光粉粒子傳播出來.....	65
圖 5-1 光寶 LTW-5630 產品圖.....	66
圖 5-2 LED 外觀模擬圖.....	66
圖 5-3 色溫與濃度關係圖.....	67
圖 5-4 濃度與散射光能分布關係.....	67
圖 5-5 螢光粉折射率虛部對出光效率的影響.....	68
圖 5-6 不同粒徑下光效隨色溫之變化.....	69
圖 5-7 空間色溫分布與粒徑之關係圖.....	69

表目錄

表 2.1 由焦點及反射所造成的相位改變之參數.....	17
表 3.1 CIE-13.3:1995 制定的色票 No.1~ No.15 資訊	45

第一章 前言

1-1 研究背景[1][2]

白光發光二極體(white light-emitting diode;WLED) 發展至今，其製作方法大致可分四類，初期為多晶片型，使用紅、綠與藍三晶片之發光二極體，藉由透鏡混和產生白光，優點為可輕易調整所需之光色，具高發光效率與高演色性。但因三色 LED 所屬材料系統、驅動電壓、溫度與光衰減率均有所差異，因而造成設計困難與成本增加，且須三套電路設計分別控制各顏色之電流，故目前商品化之產品與未來發展趨勢仍以單晶片型為主流。下述皆為單晶片型白光 LED，以 LED 激發螢光粉產生白光，故亦可稱之為 pc-LED(phosphor converted LED;pc-LED)，pc-LED 以單晶片激發螢光粉而產生白光，螢光粉藉高分子聚合物(如:silicone(矽膠)、epoxy(環保樹脂)等)封裝於 LED 晶片上方，製成快速、發光效率佳、成本較低與色域廣之 LED。pc-LED 目前使用之晶片又分兩種，藍光晶片(blue-chip)與紫外光晶片(ultraviolet-chip)，圖 1-1 所示為單晶片型白光發光二極體，如圖 1-1(a)藍光晶片加黃色螢光粉，圖 1-1(b)為藍光晶片加黃色與紅色螢光粉，圖 1-1(c)為紫外光晶片加紅、綠與藍三種螢光粉。

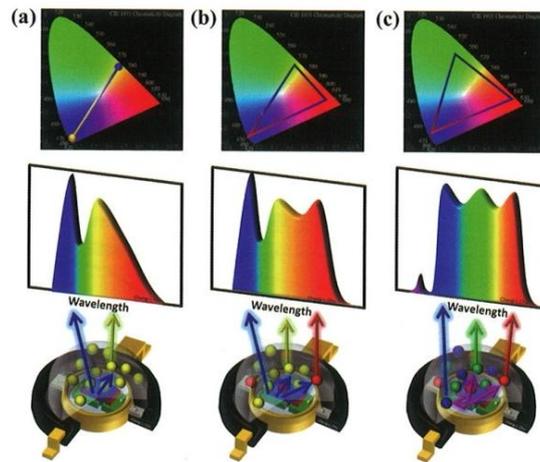


圖 1-1 單晶片型白光發光二極體(a)藍光晶片加黃色螢光粉:(b)藍光晶片加黃色與紅色螢光粉:(c)紫外光晶片加藍色、綠色與紅色螢光粉

1-1.1 藍光 LED 加黃色螢光粉

如圖 1-1(a)所示，利用藍光 LED 激發黃色螢粉，調配適當 LED 藍光與黃色螢光粉比例，產生 CIE 色度座標上白光，此種裝置優點為只需單一種螢光粉製程簡單與成本較低，發光效率最佳，目前為市面上最普遍使用之種類，但其放射光譜缺少紅色光之區域，使其演色性約 75，而演色性較低將使被照物體色彩失真，且色溫值偏高約 5000K 以上，屬冷色系白光。目前此種裝置之螢光粉多採用鋁酸鹽類或矽酸鹽類，其中矽酸鹽類螢光粉於高溫下(約 120° C)耐熱性不佳，其效率將會衰退，此外又存在耐水性不佳之問題。

1-1.2 藍光 LED 加上黃色(或綠色)與紅色螢光粉

如圖 1-1(b)所示，為補足藍光 LED 加黃色螢光粉時紅色光譜區不足的問題，加入紅色螢光粉以達補強，可以提升演色性由原來之 75 至約 85 並且降低色溫，使被照射之物體色彩不失真，呈暖色系白光，且現今照明燈具須滿足第九號色卡(R₉)之演色性檢測(第九號色卡為飽和紅色)，此色卡之演色性必須大於零，故紅色螢光粉勢必加入，現今照明用 LED 多朝此方向發展。其缺點為須多加一種螢光粉，LED 之光能損耗增加以至於整體發光效率下降，且製作成本與程序增加。

1-1.3 紫外光 LED 加上藍色、綠色與紅色螢光粉

如圖 1-1(c)所示，採用紫外光 LED(ultraviolet LED;UV LED)加上藍色、綠色與紅色螢光粉，以紫外光激發三色螢光粉而組成白光，又稱為紫外光激發白光發光二極體(UV-pumped white light emission)，依不同需求調配三種螢光粉比例可組成所需之白光，此裝置演色性可達 90 以上，色溫可調度大，但三種螢光粉之化學性質、物理性質、顆粒大小等皆不同，使製程複雜且困難度提升，造成成本相對提升，目前市面上雖不普及，但因其具顏色與色溫可調性、色域廣等優點，故

有成為照明用白光發光二極體之潛力。

圖 1-2 顯示 LED 照片與其照射物體之差異(a)藍光晶片加上黃色螢光粉與(b)藍光 LED 晶片加上黃色與紅色螢光粉。

由上述可知螢光粉在白光 LED 中扮演重要之角色，但目前處於魚與熊掌不可兼得的情況，如欲獲得高強度 WLED 則採用藍光 LED 加黃色螢光粉，但其演色性不佳，如欲得高演色性 WLED 則採用紫外光加藍色、綠色與紅色螢光粉，但其強度不佳，藍色 LED 配上黃色與紅色螢光粉則介於兩者之間。

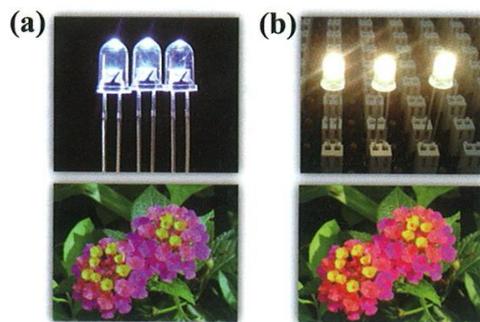


圖 1-2 LED 照片與其照射物之差異(a)藍光 LED 加黃色螢光粉(演色性約 75):(b)藍光 LED 加黃色與紅色螢光粉(演色性約 85)

1-1.4 螢光粉塗佈結構

為了追求高顏色均勻性與高輸出流明等特性，傳統的螢光粉塗佈方式(uniform distribution)已無法達成此要求，因此許多業者陸續發展出新螢光粉塗佈技術，如：敷型塗佈(conformal distribution)與遠程螢光粉(remote phosphor)等方式(如圖 1-3 所示);敷型塗佈方式較重於改善白光 LED 顏色的均勻性，而遠程螢光粉塗佈方式則著重於增進白光 LED 的光輸出。

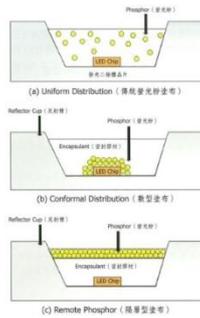


圖 1-3 三種螢光粉塗佈結構示意圖

1-2 研究動機

在一次與正在光寶實習的學長及指導教授的談話中，了解到他們對於客戶的各種發光特性的要求，所進行 LED 內螢光粉的調配都是利用過去的經驗進行嘗試與探索，因此我的指導教授希望我以物理學報為基礎來進行螢光粉特性的研究。

1-3 研究目的

做出一個實用的 LED 模型，來模擬白光 LED 封裝中螢光粉的激發、吸收、散射等作用，研究 LED 的色溫、發光效率及空間色溫分布等特性隨不同輸入參數的變化規律，以避免只能依靠經驗摸索來提高白光 LED 的品質。

1-4 論文架構

本論文是以物理學報 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 20 (2012) 204201 為基礎，使用光學模擬軟體 Lighttools 進行其相關趨勢的驗證，並探討其相關理論。第二章依序對於米氏散射理論與幾何光學散射理論作一簡介。第三章針對色度學進行相關的介紹。第四章為螢光粉模擬的參數設定及介紹。第五章模擬 LED 內螢光粉的特性。第六章為結論，最後為本論文之參考文獻。

第二章 光散射理論[3]

2-1 簡介

近年來發展了許多光學粒子尺寸量測的儀器，其中有些是利用粒子的散射特性而測得。粒徑的相關資訊通常是由散射光的強度與相位而推知。光的散射其理論架構來自 Lorenz 對於介電球的研究與 Mie(1908)對於金屬球的研究(Born and Wolf 1980)，亦即廣為人知的“Lorenz-Mie theory”或稱為“Mie theory”。這套理論提供了：當光均勻的照射在均質環境中任意大小的均質球體時的嚴格解。

在得到米氏的公式前，對於彩虹是來自於單一圓形水滴的散射之洞察已有 7 世紀之久。笛卡爾完整的幾何光學理論在一個半世紀前被創造，往後在 Airy 考慮了繞射的影響後修改其理論。

比較幾何光學與米氏理論級數的收斂性，Van de Hulst(1957)推導出大顆粒在幾何光學的振幅函數極限情況是米氏振幅函數的漸近線，因此建立了兩個本質上相同的理論。幾何光學與米氏理論的關係在 Newton(1981)與 Raszillier et al(1992)皆有記載。比較米氏理論與幾何光學的散射光強，Glantschnig et al(1981)與 Ungut et al(1981)已證明其前向散射的一致性

本章結構如下：2-2 節，簡介米氏理論；2-3 至 2-6 節介紹基於幾何光學發展而得的散射模型；2-7 節討論四種散射模態的特性；2-8 節由幾何光學推導入射光線的碰撞點；2-9 節總結本章。

2-2 米氏散射理論

2-2.1 基本假設

在米氏理論中使用球座標模擬球型粒子的散射光有以下幾點假設:

1. 單位強度的平面入射波，假設為一電場平行於 X 方向、行進方向為+Z 的面極化光。
2. 散射粒子為球形、均質且各向等性。
3. 周圍介質不具吸收性。
4. 觀測點離散射點很遠，亦即 $r \gg \lambda$ ，這暗示了觀測點所接收的光為平行光。

2-2.2 廣義的散射光振幅方程式

讓一個任意形狀及組成的固定粒子被來自於-Z 方向的平面波照射。座標的原點選擇於粒子上。入射光可寫成:

$$u_0 = e^{-(ikz+iwt)}, \quad (2.1)$$

散射光在遠場時視為一振幅反比於距離 r 的球面波。因此我們可得散射波的形式為:

$$u = S(\Theta, \varphi) \frac{e^{-ikr+iwz}}{ikr}, \quad (2.2)$$

其中 Θ 與 φ 分別為散射角與方位角，從而定義了散射粒子的振幅函數 $S(\Theta, \varphi)$ 。

沿用 Van de Hulst(1957)所使用的符號:將因子 i 置於分母是為了方便而 k 是為了使 $S(\Theta, \varphi)$ 為一不含單位的純數。結合入射波並消去時間因子，則散射波的形式亦可為:

$$u = S(\Theta, \varphi) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} u_0, \quad (2.3)$$

通常振幅函數可以寫成:

$$S(\Theta, \varphi) = |S|e^{i\sigma}, \quad (2.4)$$

其中振幅 $|S|$ 為正、相位 σ 為實數且皆為 Θ 與 φ 的函數。光強正比於振幅的平方。
因此可得:

$$I_s = \frac{|S|^2}{k^2 r^2} I_0. \quad (2.5)$$

對於一均質的球形粒子或水中的泡泡，散射函數 $S(\Theta, \varphi)$ 可被散射函數 $S_1(\Theta)$ 與 $S_2(\Theta)$ 完全的描述，而 S_1 、 S_2 分別代表了與散射平面垂直、平行振動的方向，而由於對稱性的關係，此兩函數僅與散射角相關。

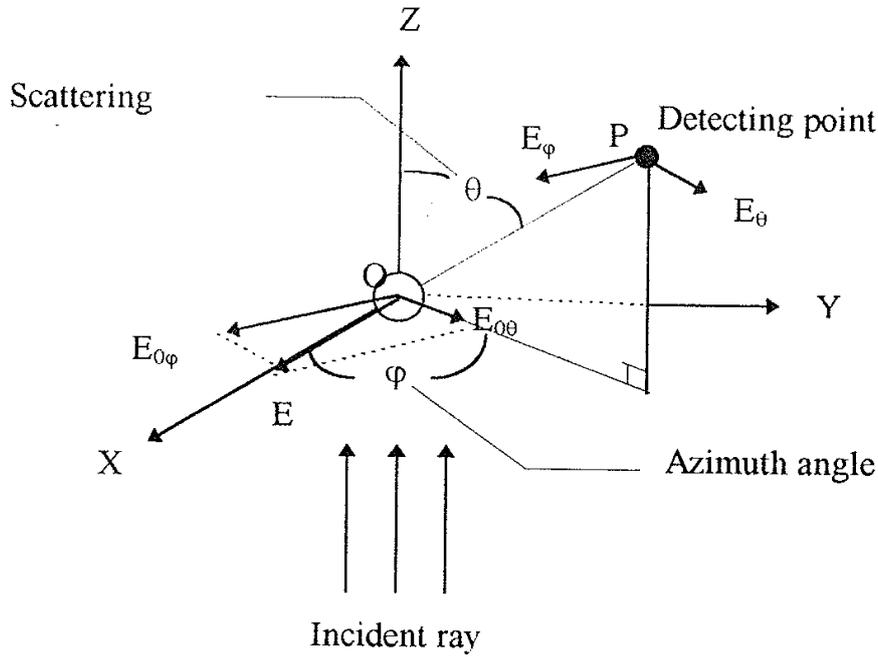


圖 2-1 入射波與散射波的電場向量分解圖

一般而言，散射面(OZ,OP)為入射光線與散射光線所形成之平面，如圖 2-1 所示。散射光電場由兩個相互垂直的極化分量(E_θ 、 E_φ)所構成，其分別平行、垂直於散射面。在 P 點的兩個散射強度 I_θ 、 I_φ 可表示為:

$$I_\theta = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_2|^2 (\cos\varphi)^2 I_0 \quad (2.6.1)$$

$$I_\varphi = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_1|^2 (\sin\varphi)^2 I_0 \quad (2.6.2)$$

若入射光為一自然光，則散射光強為兩種極態的平均值，即 $I = (I_\theta + I_\varphi)/2$ 。

2-2.3 米氏解

米氏解在 Van de Hulst(1957)符號的介紹中廣為人知，他將結果表示為兩個複數振幅的散射函數： S_1 、 S_2 ：

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n \cos \theta + b_n \tau_n \cos \theta] \quad (2.7.1)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n \cos \theta + a_n \tau_n \cos \theta] \quad (2.7.2)$$

其中散射因子 a_n 、 b_n 在大粒徑時與 Fresnel 係數相似：

$$a_n = \frac{\Psi_n(x)\Psi_n'(y) - m\Psi_n(y)\Psi_n'(x)}{\xi_n(x)\Psi_n'(y) - m\Psi_n(y)\xi_n'(x)} \quad (2.8.1)$$

$$b_n = \frac{m\Psi_n(x)\Psi_n'(y) - \Psi_n(y)\Psi_n'(x)}{m\xi_n(x)\Psi_n'(y) - \Psi_n(y)\xi_n'(x)} \quad (2.8.2)$$

其中尺寸參數 $x = \frac{2\pi a}{\lambda}$ 、 $y = ma$ ， a 為粒子半徑、 λ 為入射波長、 m 為複數折射率。

$\Psi_n(Z) = \sqrt{\frac{\pi Z}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(Z)$ 為第一類 Ricatti-Bessel 函數。 $\xi_n(Z) = \Psi_n(Z) + ix_n(Z)$ 為

Hankel 函數，其中 $x_n(Z) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi Z}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(Z)$ 為二階 Ricatti-Bessel 函數。

Legendre 函數 $\pi_n \cos \theta$ 與 $\tau_n \cos \theta$ 近似於由大粒子表面曲率造成之能量散逸，表示為：

$$\pi_n \cos \theta = \frac{P_n^1 \cos(\theta)}{\sin \theta} \quad (2.9.1)$$

$$\tau_n \cos \theta = \frac{d}{d\theta} P_n^1 \cos(\theta) \quad (2.9.2)$$

其中 $P_n^1 \cos(\theta)$ 為經典相關的第一類 Legendre 函數。

在模擬的研究上，米氏散射理論的數值計算法是由 Bohren and Huffman(1983)所提供。此算法被視為與使用幾何光學計算之結果比較的核心程序，並且被使用在幾何光學所無法計算的彩虹角上。圖 2-2 為一由直徑 $10\mu\text{m}$ 的水滴所造成的散射強度分布圖(來自於 LINME)。圖 2-3 引用自 Applied Optics, Vol.33, No.15, May, 1994, 的封面，為直徑 $20\mu\text{m}$ 的水滴所造成的近場光散射。根據圖片的描述，其亦可由米氏理論的計算而得。

光散射的分析，選擇 Lorenz-Mie theory 或幾何光學來進行近似，是依照所要取得的資訊及光學參數與粒子大小範圍所決定。如果粒子具有與入射光波長相同的級數時就該選擇 Lorenz-Mie theory。若粒子大小遠大於波長時，則選擇幾何光學來近似會較有效率。

另一個使用幾何光學的優點為相關的散射機制較容易了解。光自與雷射光束相同等級的粒子散射可被預期為非平面與非均勻的照射。非平面波前與非均勻照射(即粒子穿過測量中體積所產生的高斯效應)的困難，在幾何光學中可被更容易的解出。

2-2.4 Generalised Lorenz-Mie theory

為了跨越米氏理論對於均勻照射的限制，Gouesbet et al(1988)提供了一個處理被球形、均質且各項等性之粒子所散射的高斯光束的方法，被稱為 Generalised Lorenz-Mie theory(GLMT)的新算法。此理論可處理任意大小、位置(相對於高斯光束)的粒子。它提供了散射光的光強、相位、橫截面與輻射壓力。這套理論曾被用於確認:由雙光束相位都普勒測速儀中散射粒子的位置所造成的“彈道效應”(Grehan et al,191),(Naqwi et al,1992)等。

雖然 GLMT 在近場散射的模擬十分的合適，但在電腦的計算仍屬費時。故我們採米氏理論與幾何光學理論的近似。

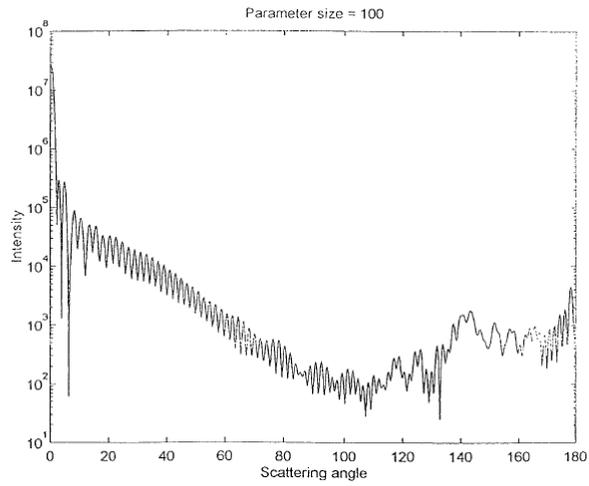


圖 2-2 自直徑為 $20.14 \mu\text{m}$ 之水滴散射光強分布圖

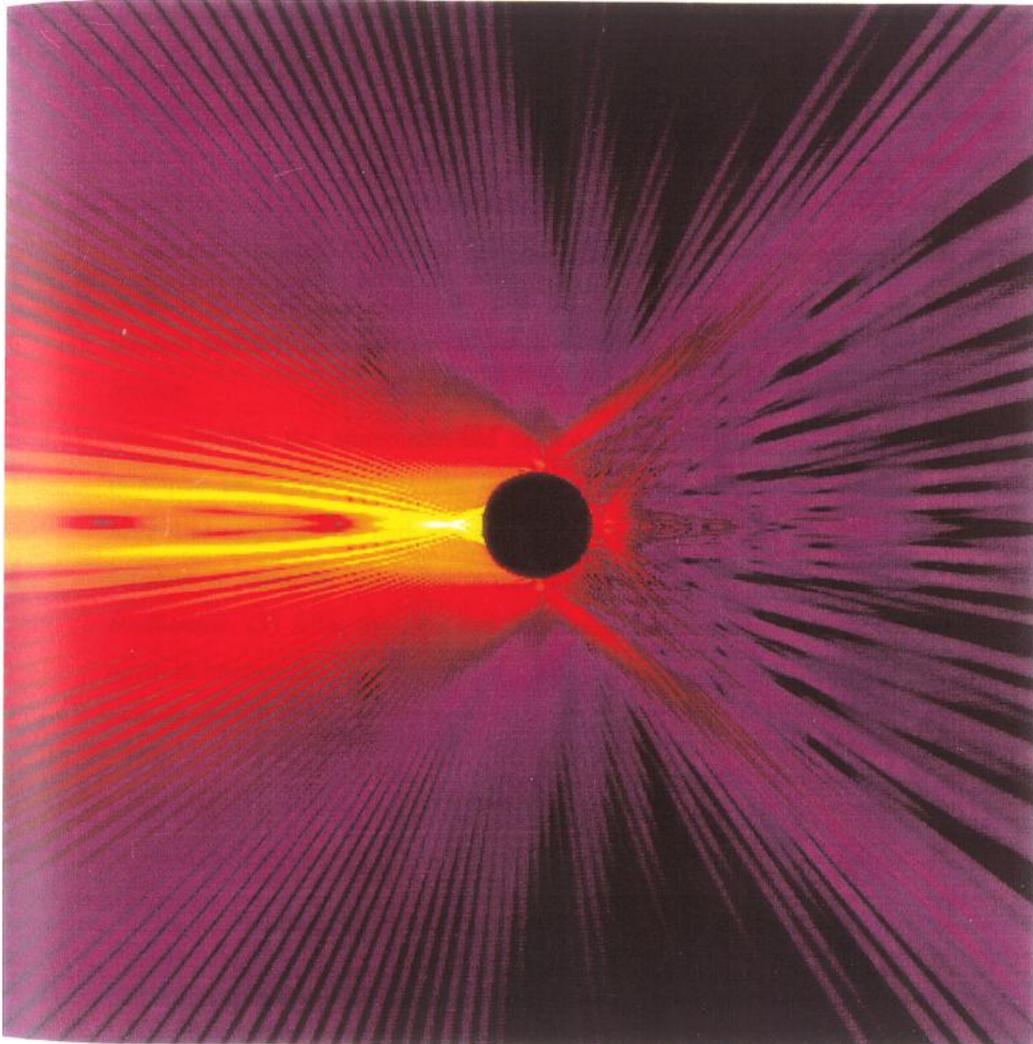


圖 2-3 自直徑為 $10\mu\text{m}$ 之粒子所得的光強樣式
(擷取自 Applied Optics, Vol.33, No.15, May 1994)

2-3 幾何光學散射理論

2-3.1 基本假設

為了使用幾何光學進行粒子的散射模擬，作了以下的假設:(1)粒子或泡泡在均質介質中為不動。(2)粒子直徑遠大於入射光波長。(3)入射光束為平行光，且同相位，即為一平面波入射但無須每點強度皆相同。若強度非均勻，則其必須相對於光軸具對稱性。(4)觀察點位在遠場，即表示就算自粒子表面的不同位置發光，其光束將在遠場相交。

除了前述的光學假設外，還需要以下的光學理論:(1)利用反射定律與折射定律可以決定光線穿透粒子時的路徑;(2)光線在反射或折射的過程中，光強的損耗是由 Fresnel 係數所決定;(3)因為光線的發散，光線離開粒子後，光強仍會持續減少;(4)依不同路徑穿越粒子的光線彼此之間為不同相位。從 van de Hulst(1957)的球形粒子之概述，可作為對於幾何光學散射理論的複習。

當光線進入粒子後經過了多次的反射與折射後，其光強將會減弱。如圖 2-4 所示。離開粒子的光線以編號 $p=0$ 開始。 $p=0$ 的光線並未進入粒子而是在表面反射。 $p=1$ 的光線，進入粒子後折射出去。

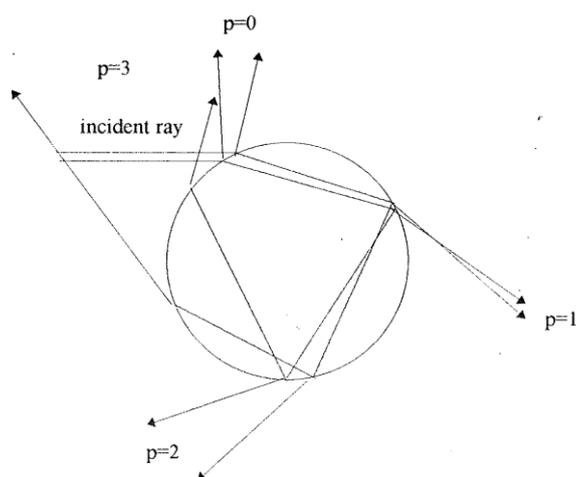


圖 2-4 水滴的光線追跡。 $p=0$:反射; $p=1$:折射; $p=2$:一次內部反射; $p=3$:兩次內部反射。

2-4 散射光強

在使用幾何光學來計算散射光光強時，有兩個效應必須考慮。其一為：每次內部反射將損耗光強。另一為：光線的傳播由離開粒子的光線所決定。

沿用 van do Hulst(1957)的符號，德拜這個單位在 100 年前就被創造。為了公式的簡化，入射角 τ 定義為入射光與散射粒子的平面之夾角。 $\cos(\tau)$ 因此定義了入射光的位置； $\tau = 90^\circ$ 時，代表垂直入射。 $\tau = 0^\circ$ 時，代表斜向入射。折射角 τ' 為表面與內部光線之夾角，可由 Snell's law: $\cos(\tau) = m\cos(\tau')$ 決定。此外，我們使用散射型態的符號 p 而非計算散射面的符號 N。

2-4.1 菲涅耳係數

從內部表面的入射光之邊界條件，振幅的反射係數可表為：

$$r_1 = \frac{\sin \tau - m \sin \tau'}{\sin \tau + m \sin \tau'}, \quad r_2 = \frac{m \sin \tau - \sin \tau'}{m \sin \tau + \sin \tau'} \quad (2.10)$$

其中 r_1 與 r_2 分別表示為垂直與平行極化； τ 與 τ' 則為入射角與折射角。振幅的反射係數，以入射角為自變數時可依公式做出 Figs. 2-5-(a)與-(b)，其對應的相對折射率分別為 1.33 與 0.75。Figs. 2-5-(c)與-(d)代表水滴雨水中泡泡的菲涅耳係數與散射角的關係。

入射光束的總能量被分出了 r_j^2 的比例至反射光、 $(1 - r_j^2)^2$ 至折射光、 $r_j^2(1 - r_j^2)^2$ 至內部一次折射光……等。振幅的比可表示為：

$$\varepsilon_{pj} = \begin{cases} r_j & \text{for } p = 0 \\ (-r_j)^{p-1}(1 - r_j^2) & \text{for } p > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

其中 p 為散射模式，j=1, 2 分別代表垂直與平行極化。能量的分配比例為 ε_{pj} 的平方。特別的是：垂直與平行極化在僅有一次折射的情況下，即 p=1，其振幅比為：

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.12)$$

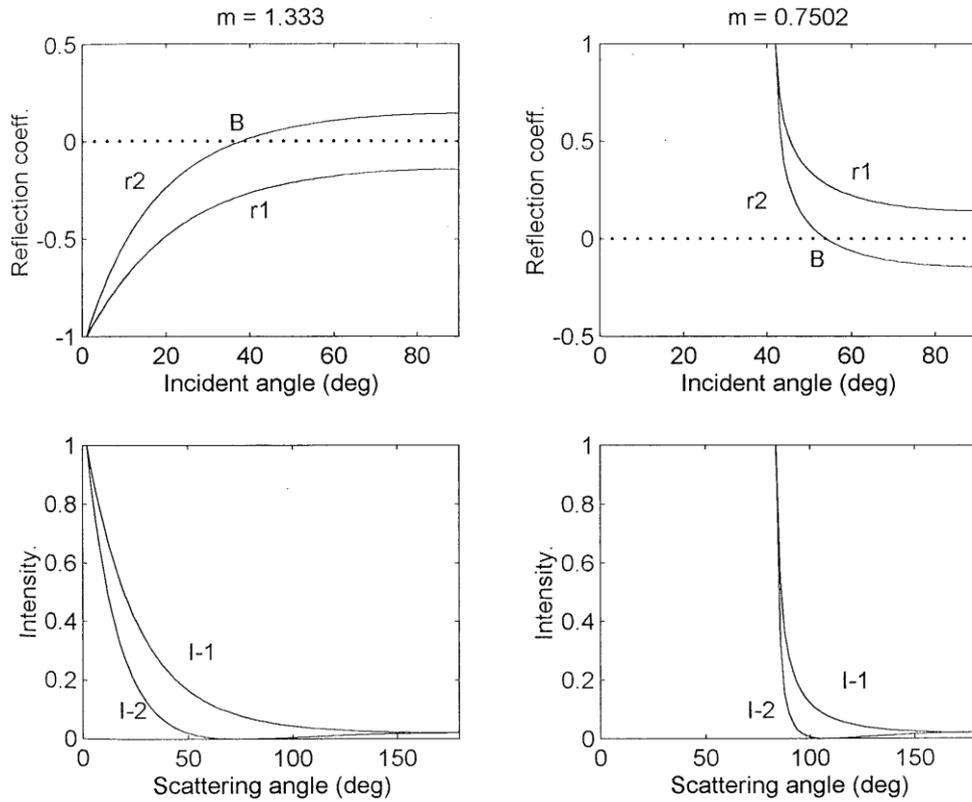


圖 2-5 反射係數與入射角:(a)水滴($m=1.33$),(b)水中氣泡($m=0.75$)。光強與散射角:(c)水滴,(d)水中氣泡。

2-4.2 曲率所造成的能量散逸

(1) 光線在第一個表面的反射

參見圖 2-6，考慮一準直的管狀光束照射於一球型氣泡。此光束之厚度為無限小，且其行進軸恰穿過氣泡之中心。 τ 與 τ' 為第一個表面之入射角與折射角。 a 為氣泡半徑， R 為測量點所形成的同心球半徑。 R 遠大於 a 。 dA 為入射光束的截面積； dA' 為圓形元件 B' 上的面積。 I_0 與 dE 分別為入射光束的光強與總輻射功率。 $I_{p=0}$ 為在外部反射的情況下在元件 B' 所測得之反射光光強； $\theta_{p=0}$ 為外部反射光的偏差角度。

入射光束的輻射能量為

$$dF = I_0 dA = I_0 \cdot 2\pi \cdot a^2 \sin \tau \cdot \cos \tau \cdot d\tau \quad (2.13)$$

由於 $R \gg a$ 故反射光可以視為由氣泡中心所發出，並且垂直於 B ，其面積為：

$$dA' = 8\pi \cdot R^2 \sin\tau \cdot \cos\tau \cdot d\tau \quad (2.14)$$

為了求得由偏差與散射所造成在 B' 上的散射光強，假設在所有點上都有外部反射。因此在 B' 上的光強為：

$$I_{N=1} = \frac{dF}{dA'} = \frac{I_0 a^2}{4R^2} \quad (2.15)$$

其與散射氣泡材料及入射光半徑無關，為一定值。若由氣泡中心所發出的點光源之光強為 I_0 ，距離為 R 處之光強則為 $I = \frac{I_0 a^2}{R^2}$ ，由 2.13 式可得 $\frac{I_{P=0}}{I} = \frac{1}{4}$ 。

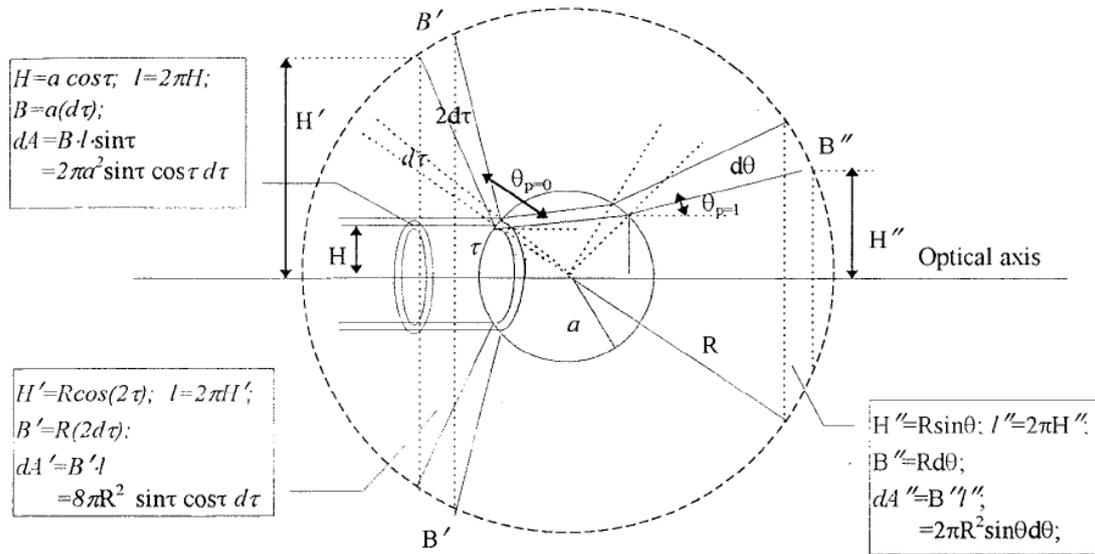


圖 2-6 與氣泡同軸的無限細管狀光束的反射與折射

(2) 光線在第二個面的折射

考慮圖 2-6 距離為 R 的第二個圓形元件 B'' ，微量面積為：

$$dA'' = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \quad (2.16)$$

其中 θ 為散射模式 $P=1$ 的偏差角。由式子(2.13)至(2.16)可得到，在距離為 R 處的光強 I_P 為：

$$I_P = \frac{dF}{dA''} = I_0 \frac{a^2 \sin\tau \cos\tau d\tau}{R^2 \sin\theta} = I_0 \frac{a^2}{R^2} D \quad (2.17)$$

其中 D 參數，導致能量的散逸被稱為“Divergence”或“Gain”，表示為：

$$D = \frac{\sin \tau \cos \tau}{\sin \theta \left| \frac{d\theta}{d\tau} \right|} \quad (2.18)$$

與求得 D 我們必須知道 $\frac{d\theta}{d\tau}$ 。參見圖 2-7，每道光束進入或離開水滴的偏差角皆為

$\tau' - \tau$ ，在內部反射的偏差角則為 $2\tau'$ 。因此總偏差角 θ_p 為：

$$\theta_p = 2\tau - 2p\tau' \quad (2.19)$$

其中 p 為散射模式。

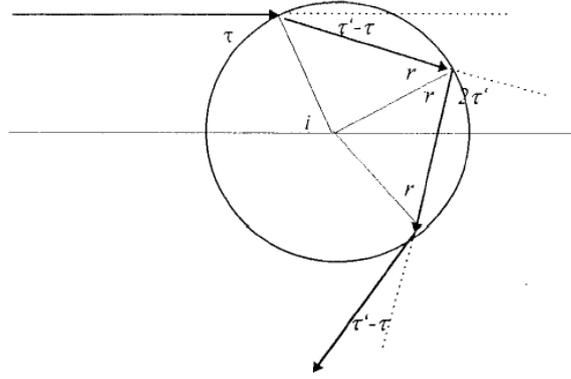


圖 2-7 反射與散射的偏差角度

因為散射強度為散射角(範圍為: $0 \leq \theta \leq \pi$)的函數，所以 θ 與 θ_p 的關係相當重要：

$$\theta_p = K \cdot 2\pi + q\theta \quad (2.20)$$

其中 K 為非負整數、 $q=+1$ 或 -1 ，確切值由散射模式決定。前四個模式的參數列

於表 2-1。由(2.20)式可知： $\left| \frac{d\theta}{d\tau} \right| = \left| \frac{d\theta_p}{d\tau} \right|$ 。將 $\tau' = \cos^{-1}\left(\frac{\cos \tau}{m}\right)$ 帶入(2.19)式可得：

$$\theta_p = 2\tau - 2p\left[\cos^{-1}\left(\frac{\cos \tau}{m}\right)\right] \quad (2.21)$$

將 $\frac{d\tau}{d\theta}$ 帶入(2.18)式可得：

$$D = \frac{\sqrt{m^2 - (\cos \tau)^2} \sin \tau \cos \tau}{2[\sqrt{m^2 - (\cos \tau)^2} - p \sin \tau] \sin \theta} \quad (2.22)$$

例子：

- (a) 外部反射光($p=0$): $\theta_{p=0} = 2\tau$ ， $D=1/4$ 。其反映出外部反射模式的散度與散射角及粒子材料無關。

(b) 純折射光($p=1$): $\theta_{p=1} = 2\tau - 2\tau'$ ，由 Snell's law 可得入射角與散射角的關係:

$$\cos \tau = \frac{m \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2}}}$$

因此由(2.13)式可得:

$$D = \frac{m^2 \left(m \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) \left(m - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2} \right)^2} \quad (2.23)$$

2-4.3 散射振幅函數

集合 Fresnel 係數與上述討論之 D 值，可得平行極化、垂直極化的散射振幅:

$$S_1(p, \theta) = x \varepsilon_1(p, \theta) D^{\frac{1}{2}}(p, \theta) \exp[i\sigma(p, \theta)] \quad (2.25.1)$$

$$S_2(p, \theta) = x \varepsilon_2(p, \theta) D^{\frac{1}{2}}(p, \theta) \exp[i\sigma(p, \theta)] \quad (2.25.2)$$

其中 x 為粒子的尺寸參數， $x=2\pi a/\lambda$ ， λ 為波長， σ 為光的相位，如下所示。

2-5 相位

當光線進入球型氣泡，其皆為平行且同相位。而在離開時則為不同相位。

造成相位改變的原因，可被歸咎於下列三樣:

- (1) 反射將會引起相位的改變。當光自表面反射，其相位可能改變 π 。
- (2) 當光線經過焦點，其相位將領先 $\pi/2$ 。
- (3) 光程差可引起相位的改變。

2-5.1 由反射造成的相位改變

當光由疏介質至密介質時，入射光的相位將改變 180° 。由反射造成的相位改變，與 Fresnel 係數(ϵ)有相當的關係，因為 ϵ 可正可負。如果一個負值得 ϵ 程上電磁場，這代表相位的 180° 改變。因此，由反射造成的相位貢獻為：

$$\epsilon_{pj} = \begin{cases} 0 & \text{for } \epsilon_{pj} > 0 \\ \pi & \text{for } \epsilon_{pj} < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

2-5.2 由焦點造成的相位改變

當光線經過焦點，其相位將領先 $\pi/2$ 。Van de Hulst 定義兩種焦點，分別為 a 型與 b 型。a 型焦點發生在，當兩相鄰光線在同一散射平面交會。B 型焦點發生在，當所有光線穿過光軸。沿用 van de Hulst(1957)的符號，a 型焦線的 $p-1/2(1-s)$ 倍與 b 型焦線的 $-2k+1/2(1-q)$ 倍，其中 k 與 q 如(2.20)式所示， $s = \pm 1 = \frac{d\theta_p}{d\tau}$ 的符號。由焦線所造成的相位改變為 $\frac{\pi}{2} \left(p - 2K + \frac{s}{2} - \frac{q}{2} \right)$ 。詳細的參數值可由圖 2-8 得到(其改寫自 van de Hulst(1957))。

表 2.1 由焦點及反射所造成的相位改變之參數

<i>mode p</i>	<i>k</i>	<i>q</i>	<i>s</i>	$p - 2K - \frac{q}{2} + \frac{s}{2}$	<i>number of reflection</i>	
0	0	1	1	0	1	$\theta_{p=0} = \theta$
1	0	-1	1	2	0	$\theta_{p=1} = -\theta$
2	0	-1	-1	2	1	$\theta_{p=2} = -\theta$
			1	3	1	
3	-1	1	-1	5	2	$\theta_{p=3} = \theta - 2\pi$
			1	4	2	

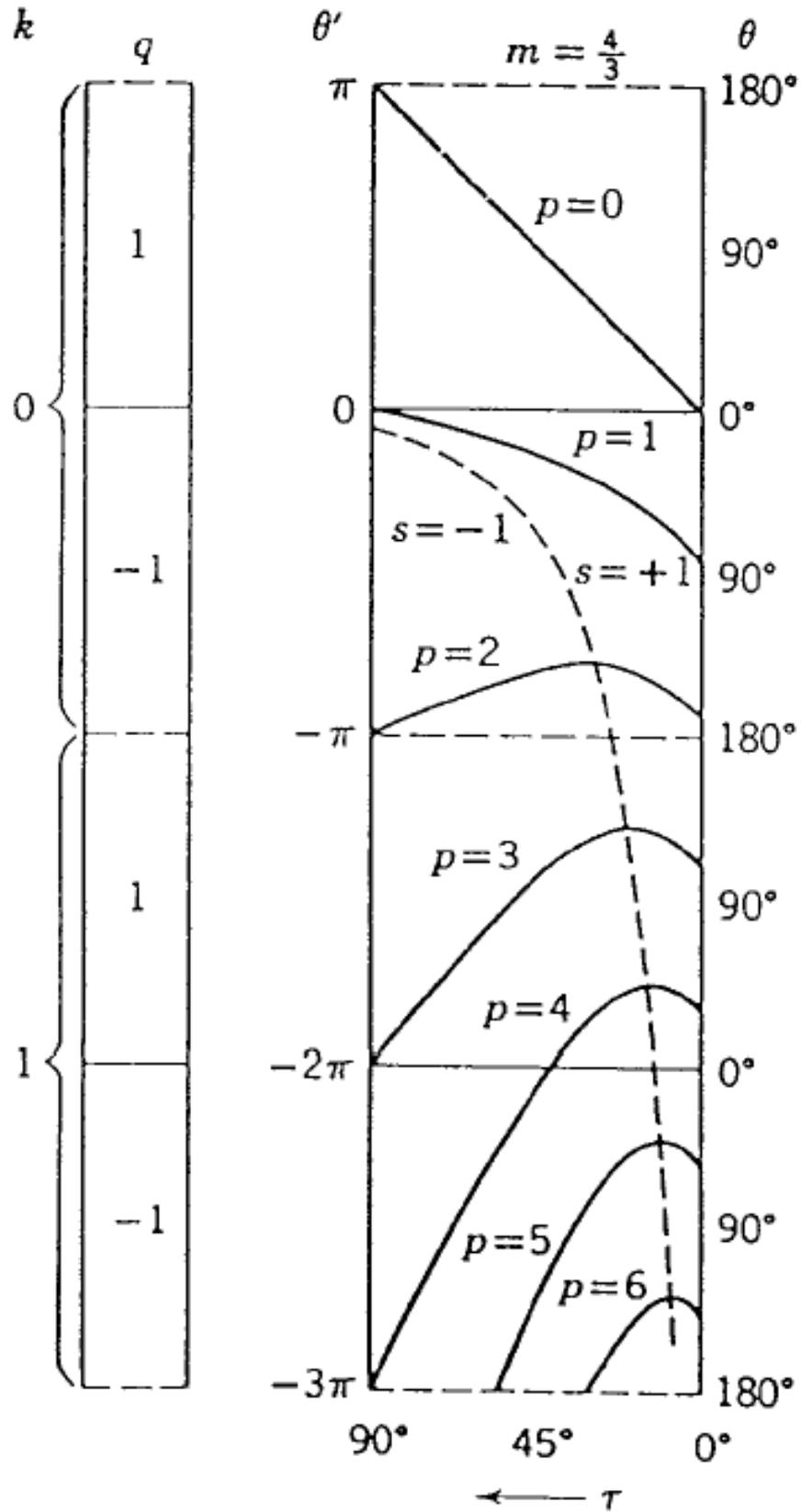


圖 2-8 幾何光線經 $p-1$ 次內部反射後，穿過 $m=4/3$ 的水滴，其出射角 θ_p 與入射角 τ 的關係圖及參數 K, q, s 的定義

2-5.3 由於光程差所造成的相位差

如圖 2-9-(a)與-(b)，路徑長為 X_1 、 L 、 X_2 的總和。如果在水滴內有多次的反射則距離 L 必須乘以 p 。

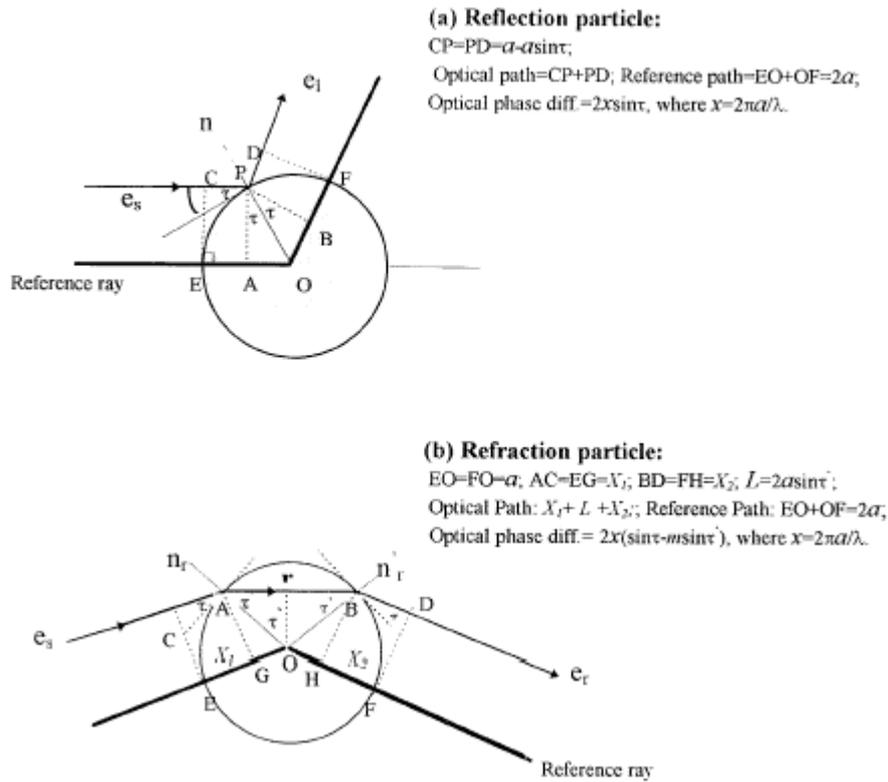


圖 2-9 由路徑不同所造成的相位改變(相對於參考光)。

求光程必須在路程的式子中乘上 k 與光線所在位置之材料的折射率：

$$\text{optical path length} = k[X_1 + (mLp) + X_2]. \quad (2.27)$$

我們所感興趣的值为：由光程差所造成的相位改變。為了計算相位的改變，我們定義：通過粒子中心且具有與入射時相同的反射角或折射角者為參考光。其長度為 $2a$ 並假設其所在之介質的折射率為 1。因此參考光的光程為 $2ak$ 。光程差 δ 因此可得為：

$$\delta = 2ka - k[X_1 + (mLp) + X_2] = 2ak(\sin\tau - m\sin\tau'), \quad (2.28)$$

對於反射光而言 δ 為正，對於折射光而言則為負。對於 $p=0$ 及 $p=1$ 的極化模態，

假設散射角為 θ 時，光程差為：

$$\delta_{p=0} = kd_p \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.29.1)$$

$$\delta_{p=1} = -kd_p \sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2}} \quad (2.29.2)$$

由調焦效應與光程差所造成的相位改變 σ 為加總 δ 與由反射所造成的相位移。

因此總相位移可表為：

$$\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} = \frac{\pi}{2} + \pi \left(\text{sign of } \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) + \frac{\pi}{2} \left(p - 2k + \frac{s}{2} - \frac{q}{2} \right) + 2ka(\sin \tau - mpsin \tau') \quad (2.30)$$

其中 σ_1 與 σ_2 分別為垂直與平行極化光的相位移。在自動加入複數振幅函數的振幅項的符號後，我們不考慮其對於相位變化的影響。這代表著(2.30)式的領導項 $\pi/2$ 依循著 van de Hulst(1957)的慣例。此慣例牽涉到時間相關項 $\exp(+i\omega t)$ 並且將散射場正比於 $\frac{\exp(-ikr)}{ikr}$ 。這個慣例的重要性在研究上並非非常重要，因為只有相位差會影響結果。參考表 2.1 的參數，並且使用(2.29)式可得反射光與折射光的相位改變為：

$$\sigma_{p=0} = \frac{\pi}{2} + kd_p \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{for } p=0 \quad (2.31.1)$$

$$\sigma_{p=1} = \frac{3\pi}{2} + kd_p \sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2}} \quad \text{for } p=1 \quad m>1 \quad (2.31.2)$$

$$\sigma_{p=1} = \frac{\pi}{2} + kd_p \sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2}} \quad \text{for } p=1 \quad m<1 \quad (2.31.3)$$

2-6 幾何光學的散射振幅函數

2-6.1 反射(p=0)

結合 Fresnel 係數(2.10 式) (即在第一個面的反射光光強的散度)與由反射(2.31)式所造成的相位改變， $p=0$ 模態的振幅函數的集合可以散射角表示為:

$$S_1 = \frac{k d_p}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2} - \sqrt{m^2 - \left(\frac{\cos \theta}{2}\right)^2}}{\sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{m^2 - \left(\frac{\cos \theta}{2}\right)^2}} \left(\frac{1}{2}\right) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + k d_p \sin \frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (2.32.1)$$

$$S_2 = \frac{k d_p}{2} \frac{m^2 \sin \frac{\theta}{2} - \sqrt{m^2 - \left(\frac{\cos \theta}{2}\right)^2}}{m^2 \sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{m^2 - \left(\frac{\cos \theta}{2}\right)^2}} \left(\frac{1}{2}\right) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + k d_p \sin \frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (2.32.2)$$

圖 2-10 表示對於一單位直徑的散射粒子，在不同的 $|S_1|^2$ 與 $|S_2|^2$ 值時，所對應的相對折射率與散射角的關係。參考圖 2-5 與圖 2-10-(b)，其暗示了:在平行極化光有布魯斯特角的存在。這個現象可被用於優化雙相位的都普勒測速儀。

2-6.2 折射(p=1)

結合強度的 D 值(2.23 式)、穿過粒子的能量比(2.11 式)與相位改變(2.31 式)，對於折射粒子($m>1$)的散射函數之集合可表為:

$$S_1 = \frac{k d_p}{2} \frac{2m^2[(m \cos \frac{\theta}{2} - 1)(m - \cos \frac{\theta}{2})]^{3/2}}{(m^2 - 1)^2 (1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2}) \sqrt{\cos \frac{\theta}{2}}} \exp\left[i\left(\frac{3\pi}{2} + k d_p \sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2}}\right)\right] \quad (2.33.1)$$

$$S_2 = \frac{S_p}{(\cos \frac{\theta}{2})^2} \quad (2.33.2)$$

其中垂直極化與平行極化的比是由(2.12)式求得。同樣的，圖 2-11 表示對於一單位直徑的散射粒子，在不同的 $|S_1|^2$ 與 $|S_2|^2$ 值時，所對應的相對折射率與散射角的關係。圖 2-12 表示折射模式與反射模式之光強比。圖 2-12-(b)中突出的地方是由布魯斯特角所造成。

2-6.3 高階模態(P>1)

如同前述，入射角與散射角的關係可由多項式近似而得。藉由結合強度與相位，可得 $p=2$ 與 $p=3$ 的角度分布。例如：圖 2-13-(a)與-(b)分別表示了垂直偏振與平行偏振，對於一直徑為 $50\mu\text{m}$ 的水滴，前四個散射模式的散射角分布。明顯的，在背向散射方向間隔為 $P=2$ 與 $P=3$ 間的暗帶。

2-6.4 幾何光學與米氏理論間的比較

目前為止，所有在計算整個球型粒子產生的散射樣式所需要的參數皆已提及。我們所需要做的就是去整合各個電磁場並加在干涉元件。

$$S_1 = \sum_{p=0}^3 S_1(p), \quad S_2 = \sum_{p=0}^3 S_2(p) \quad (2.34)$$

實際上我們不必使 P 趨近無窮大。若我們感興趣的是前向散射，則重要的值為 $p=0$ 與 $p=1$ 。在計算完振幅函數後，光強可由其平方後求得。由於我們所關心的散射角度為大於 25° 的範圍，故繞射效應可忽略。因此在一特定散射角度的散射光可由折射光與反射光求得。圖 2-13-(a)與-(b)是利用幾何光學所計算出的散射光強分布。圖 2-14 主要比較幾何光學與米氏理論在前向散射的方向(20° - 80°)是相當一致的。但當粒徑變大時將不吻合。

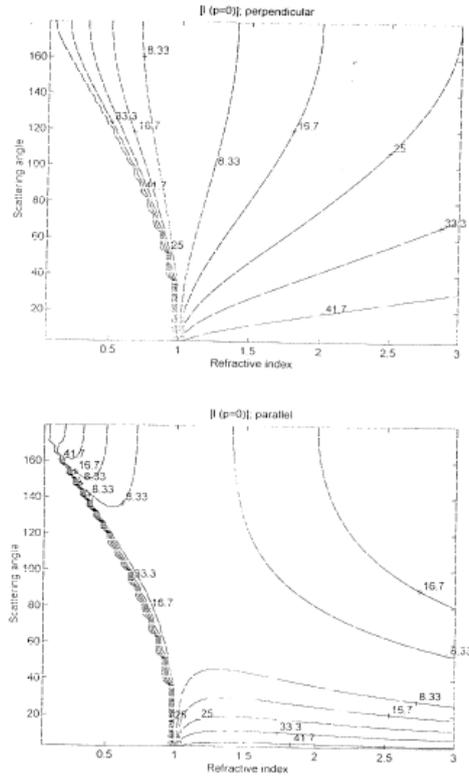


圖 2-10 粒子反射的強度圖。(a)垂直極化(b)水平極化

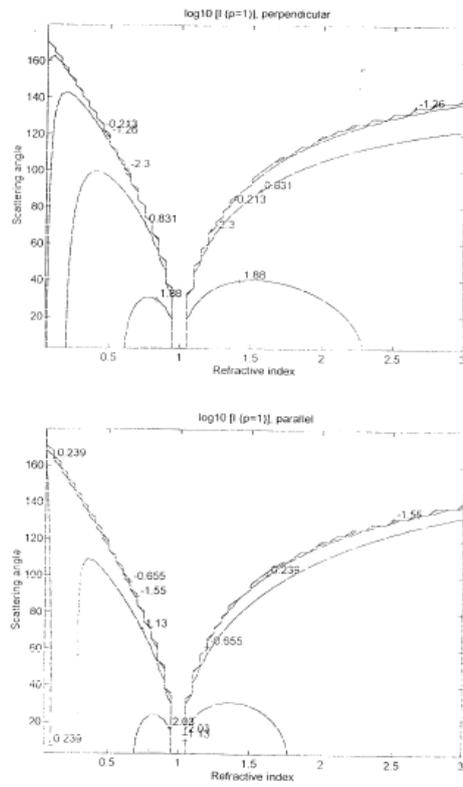


圖 2-11 粒子折射的強度圖。(a)垂直極化(b)水平極化

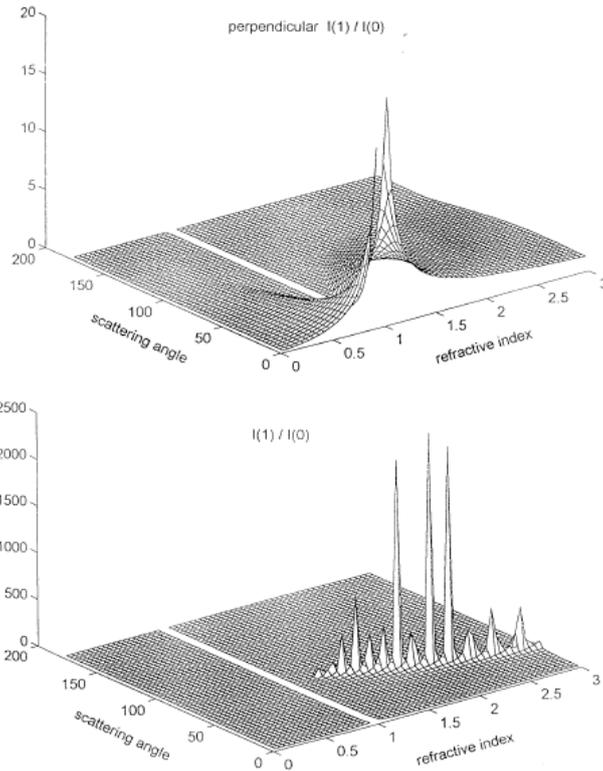


圖 2- 12 折射模式與反射模式的強度比。(a)垂直極化(b)水平極化

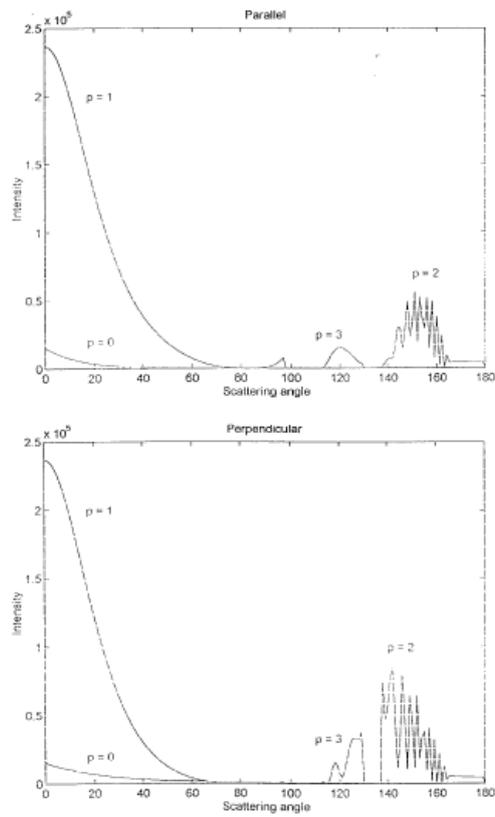


圖 2- 13 前四種模態的光強。(a)垂直極化(b)水平極化

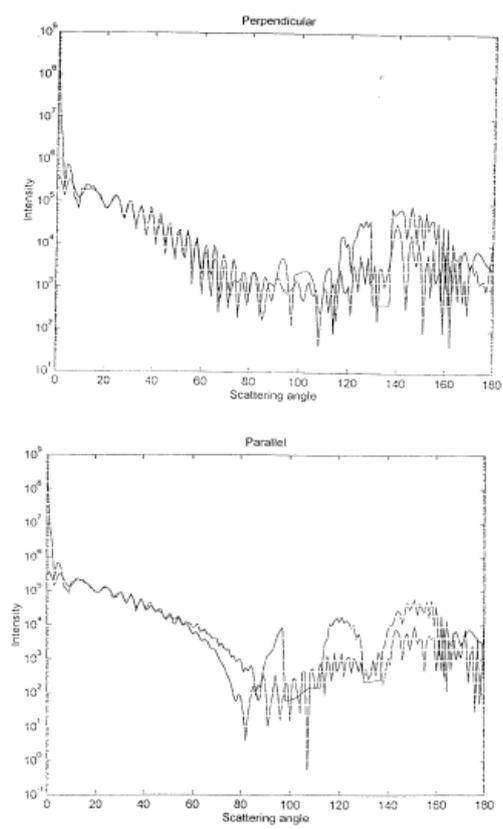


圖 2-14 比較由米氏理論計算與幾何光學的四種模態加總的光強分布。

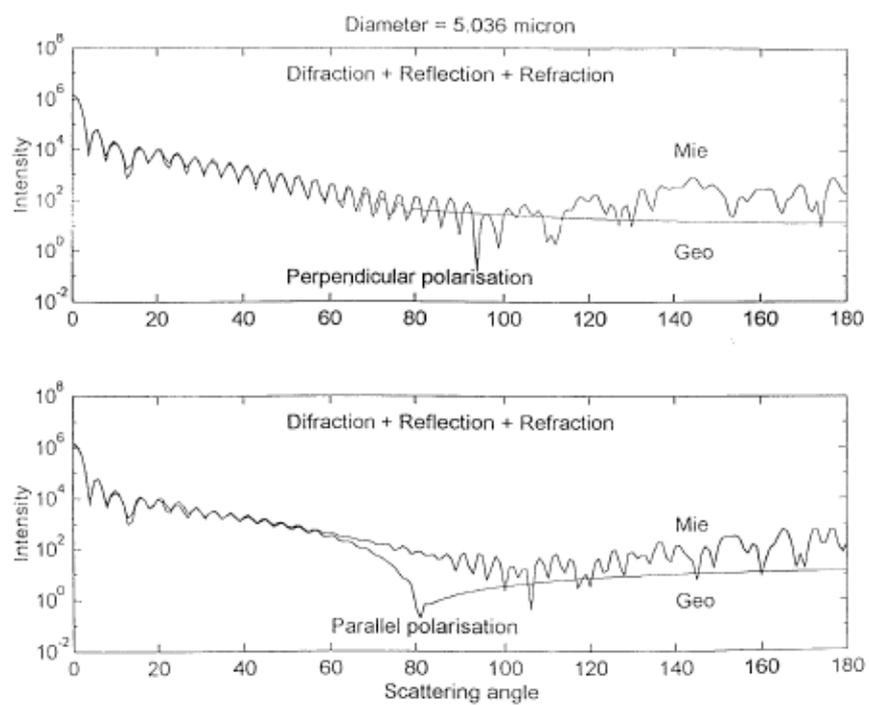


圖 2-15 比較由米氏理論計算的光強分布與由幾何光學的繞射、反射、折射所計算的光強分布。(a)垂直極化(b)水平極化

2-7 散射模式的特點

自 snell's law 與反射的 Fresnel 係數推導可得前四種散射模態的特性。前三種散射模式的特性如圖 2-16 所示。

2-7.1 反射模式(p=0):布魯斯特角與全反射角

圖 2-5-(a)與-(b)中 B 點所對應的角度為布魯斯特角。其發生的情況為入射角與折射角相加為 90 度。再由 snell's law 可得布魯斯特角為：

$$\theta_B = \cot^{-1}(m) \quad (2.35)$$

當光線自密介質傳至疏介質時，如圖 2-5-(b)所示：當入射角大於臨界角時其反射係數為 1。超過臨界角時光線將進行全反射。

2-7.2 折射模式(p=1):臨界角

對於氣泡($m < 1$)全反射的臨界角與粒子($m > 1$)的截止角，如圖 2-16 中 “p=1” 所示，可由 snell's law 得到：

$$\theta_c = \cos^{-1}(m), \quad (2.36)$$

其中 m 為相對折射率。對於水中氣泡而言臨界角為 41.4° ，即截止散射角為 82.8° 。

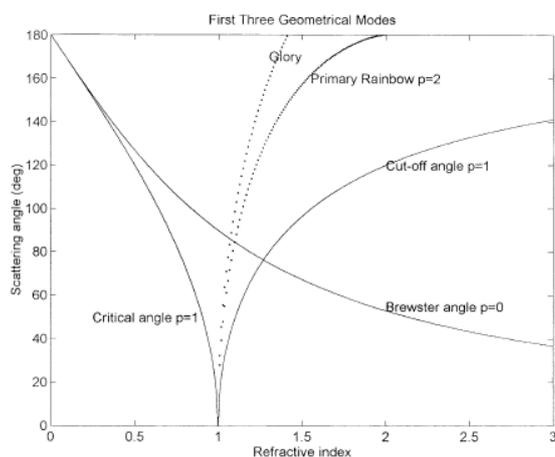


圖 2-16 前三種散射模式之散射角與折射率的關係

2-7.3 一次內部反射模式(p=2):彩虹角

研究彩虹即是研究微小球型水滴所造成的光散射。當雨滴被太陽光所照射，部分光將被外層表面所反射，其餘將被折射出去。接下來我們考慮一次內部反射的光線，因其為產生彩虹的主要因素。光束經一次內部反射離開水滴，其中最密者所對應的角度即為彩虹發生的位置。因此一次內部反射的偏折角為

$\theta_{p=2} = 2\tau - 4\tau'$ 。我們可藉由 $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ 找到最後可能的偏折角，再使用 Snell's law

可求的最後的偏折角: $\sin\tau = \sqrt{\frac{m^2-1}{3}}$ ， $\cos\tau' = \sqrt{\frac{4-3m^2}{3m^2}}$ 代入 $\theta_{p=2}$ 可得:

$$\theta_{\text{rainbow}} = 2 \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{m^2-1}{3}}\right) - 4 \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-3m^2}{3m^2}}\right) \quad (2.37)$$

再利用三角函數的計算可得:

$$\cos \frac{\theta_{\text{rainbow}}}{2} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{2^2-m^2}{3}\right)^{3/2} \quad \text{for primary rainbow} \quad (2.38)$$

考慮二次內部反射(p=2)，經同樣的步驟，可得二階彩虹的散射角為:

$$\cos \frac{\theta_{\text{rainbow}}}{2} = \frac{4m^2-9}{4m^3} \sqrt{(m^2-1)(9-m^2)} \quad \text{for secondary rainbow} \quad (2.39)$$

由(2.38)與(2.39)式可知彩虹角僅與相對折射率有關。因為一次內部反射的最小偏折角的位置位於後向散射的最亮點，此現象已被 Roth et al(1991)發展為折射率檢測的方法，稱為“Rainbow Refractometry”。又因為折射率受溫度的影響非常大故亦可發展為溫度的檢測方法。

2-8 碰撞點

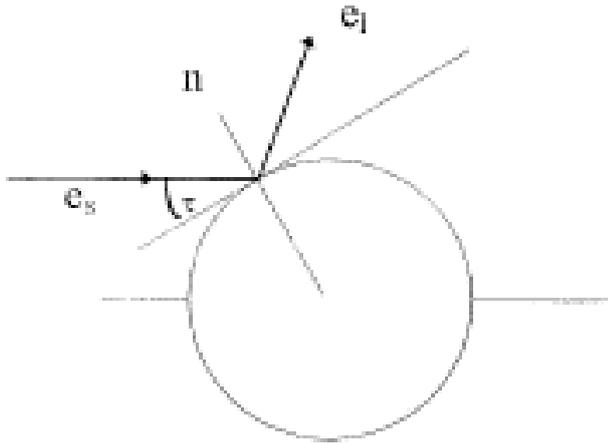
受定向光照射的球型粒子在接收點所得到的散射光，可決定入射光的碰撞位置。在粒子上的入射點可由入射光與散射光的單位向量、粒子的球型對稱與 Snell's law 求得。根據高斯雷射光束的使用，每條光線對於散射振幅的貢獻將影響入射光在入射點的強度。

2-8.1 粒子的反射

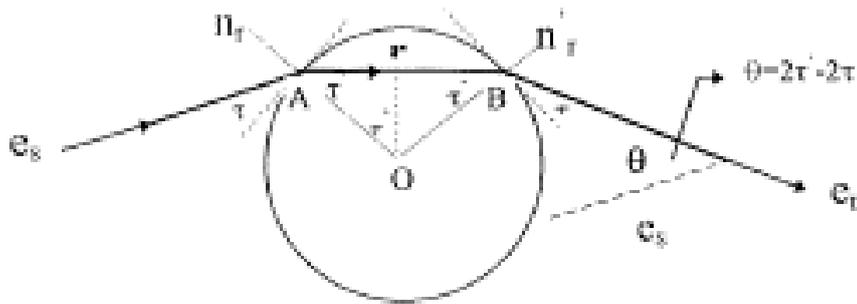
如圖 2-17-(a)，碰撞點的法向量為：

$$n_1 = \frac{e_l - e_s}{|e_l - e_s|} \quad (2.39)$$

其中 e_s 與 e_l 分別為入射光與反射光的單位向量。



(a) Reflecting particle



(b) Refracting particle

圖 2-17 (a)反射定律(b)折射定律

2-8.2 粒子的折射

如圖 2-17-(b)所示:光線的入射點為 A，離開點為 B，由 snell's law 可得:

$$\mathbf{e}_s \times \mathbf{n}_r = m(\mathbf{r} \times \mathbf{n}_r), \quad (2.40.1)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{n}'_r = m(\mathbf{r} \times \mathbf{n}'_r), \quad (2.40.2)$$

其中 \mathbf{e}_s 與 \mathbf{e}_r 分別為入射光與散射光的單位向量， \mathbf{n}_r 與 \mathbf{n}'_r 分別為入射點與離開點的法向量， \mathbf{r} 為在粒子內沿折射光行進方向之單位向量， m 為粒子的相對折射率。

若將式子分別乘上 \mathbf{n}_r 與 \mathbf{n}'_r 可得:

$$(\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{n}_r)\mathbf{n}_r - \mathbf{e}_s = m[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_r)\mathbf{n}_r - \mathbf{r}] \quad (2.41.1)$$

$$(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}'_r)\mathbf{n}'_r - \mathbf{e}_r = m[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'_r)\mathbf{n}'_r - \mathbf{r}] \quad (2.41.2)$$

再加入入射角 τ 與折射角 τ' 後，由圖 2-17-(b) 可得:

$$(-\sin \tau)\mathbf{n}_r - \mathbf{e}_s = m[(-\sin \tau)\mathbf{n}_r - \mathbf{r}] \quad (2.42.1)$$

$$(\sin \tau)\mathbf{n}'_r - \mathbf{e}_r = m[(\sin \tau)\mathbf{n}'_r - \mathbf{r}] \quad (2.42.2)$$

其中 $\sin \tau, \sin \tau', \cos \tau$ 與 $\cos \tau'$ 可以散射角 θ 為自變數表為:

$$\sin \tau = \frac{m \cos \frac{\theta}{2} - 1}{(1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2})^{1/2}} \quad (2.43.1)$$

$$\cos \tau = \frac{m \sin \frac{\theta}{2}}{(1 + m^2 - 2m \cos \frac{\theta}{2})^{1/2}} \quad (2.43.2)$$

$$\sin \tau' = \frac{(m^2 - \cos^2 \tau)^{1/2}}{m} \quad (2.43.3)$$

$$\cos \tau' = \frac{\cos \tau}{m} \quad (2.43.4)$$

其中 $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_r)$ 定義為入射光與散射光間的散射角。將(2.43 式) 代入(2.41 式)可得:

$$m\mathbf{r} - \mathbf{e}_s = -l_r \mathbf{n}_r \quad (2.44.1)$$

$$m\mathbf{r} - \mathbf{e}_r = l_r \mathbf{n}'_r \quad (2.44.2)$$

其中 $l_r = m \sin \tau' - \sin \tau$ 。由三角形 OAB 可得 $\overline{AB} = 2 \sin \tau'$ ，因此:

$$\mathbf{n}_r + (2\sin\tau')\mathbf{r} = \mathbf{n}'_r \quad (2.45)$$

代入(2.44 式)後可得:

$$\mathbf{n}_r = \mp \frac{m-2l_r\sin\tau'}{2l_r(m-l_r\sin\tau')} \mathbf{e}_s \pm \frac{m}{2l_r(m-l_r\sin\tau')} \mathbf{e}_r \quad (2.46)$$

代入 l_r 可得:

$$\mathbf{n}_r = \frac{me_r - [m-2\sin\tau'(m\sin\tau' - \sin\tau)]e_s}{2(m\sin\tau' - \sin\tau)[m - (m\sin\tau' - \sin\tau)\sin\tau']} \quad (2.47)$$

將(2.43 式) 代入(2.47 式)可得:

$$2[m - (m\sin\tau' - \sin\tau)\sin\tau'] = \sqrt{2(1 + \cos\theta)} = 2\cos\frac{\theta}{2} \quad (2.48)$$

與

$$m\sin\tau' - \sin\tau = \sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\frac{\theta}{2}} \quad (2.49)$$

因此:

$$\mathbf{n}_r = \frac{[m-2\cos\frac{\theta}{2}]e_s - me_r}{2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1+m^2-2m\cos\frac{\theta}{2}}} \quad (2.50)$$

相對於粒子中心，反射與折射的入射光的碰撞點可被表為位置向量如下:

$$r_{imp,l} = \frac{1}{2}d_p n_l \quad (2.51.1)$$

$$r_{imp,r} = \frac{1}{2}d_p n_r \quad (2.51.2)$$

2-8.3 前兩種散射模態的干涉

氬氬雷射照射一粒子其產生的圖樣如圖 2-2 與圖 2-3 所示。散射角度的波浪型分布是由前兩種散射模態(即反射與折射)所引起。如圖 2-20 所示:前向散射角度(0° - 80°)的干涉現象，可視為兩道散射光的楊氏實驗(即反射光與折射光)。利用楊氏實驗的原理可知道兩道光(反射光與折射光)碰撞點的距離。

對於一固定粒徑的粒子，其散射極大與極小相間 $\text{opd}(\theta + \Delta\theta) - \text{opd}(\theta) = 2\pi$ 。其中 $\Delta\theta$ 可表為:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= \frac{2\pi}{\frac{d}{d\theta}(opd)} \\
&= \frac{\lambda}{a} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \frac{m \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+m^2-2m \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^{-1} \\
&= \frac{\lambda}{b} \tag{2.52}
\end{aligned}$$

其中 b 為反射光與折射光的間距，而 θ 為折射光的偏折角，可被表示為相對於光軸距離之和：

$$\begin{aligned}
b &= d_1(\tau_1) + d_r(\tau_r) \\
&= a \left(\cos \frac{\theta}{2} + \frac{m \sin \frac{\theta}{2}}{1+m^2-2m \cos \frac{\theta}{2}} \right) \tag{2.53}
\end{aligned}$$

如圖 2-18 所示：由反射光與折射光所形成的條紋就如同由雙狹縫所造成的干涉條紋。在這個原理中，粒子扮演著楊氏實驗中雙狹縫的角色。由(2.37 式)與楊氏實驗的原理，可知條紋的強度正比於散射粒子的大小。

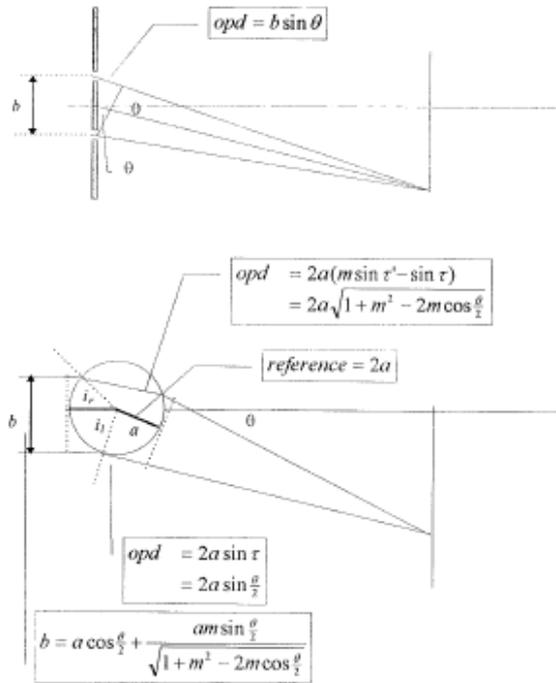


圖 2- 18 楊氏實驗原理。條紋的角度間隔為 $\Delta\theta = \lambda/b$ 。(b)由反射光及折射光所形

成的干涉圖樣(可視為楊氏實驗)，其光程差為

$$opd = 2a \sin \frac{\theta}{2} - (-2a \sqrt{1+m^2-2m \cos \frac{\theta}{2}})$$

總結上述對於反射光及折射光之碰撞點的討論，干涉條紋的強弱反比於粒子直徑。當已知強度、散射角、入射光波長與粒子折射率時，散射直徑可由(2.52式)與(2.53式)求得。

2-9 總結

本章包含了米氏理論的一般解與幾何光學中散射波的強度與相位之詳細推導。為了有更直覺性的方法我們必須借助於幾何光學。光散射的主要應用為前向散射方向，因為其光強高於後向散射光。另一原因是米氏理論與幾何光學在前向散射上具有相當好的一致性。一些散射特性可被應用於測量粒子大小與折射率。

第三章 色度學[4]

3-1 CIE 標準色度系統

可見光隨著波長(頻率)的不同使人眼視網膜中的錐狀細胞產生不同的刺激值，而這些刺激值引起大腦所表現出來的即為顏色。十七世紀牛頓首先使用三稜鏡分光，確定了光形成光譜後所顯現的顏色，接著從二十世紀開始，科學家開始研究如何去定義及量測色彩，逐漸形成一門學說—色度學，主要以人的顏色視覺、顏色測量理論與技術的科學。

目前色度學採用國際照明協會(CIE)所規定的一套顏色測量原理、數據以及計算方式，簡稱 CIE 標準色度系統。CIE 在 1931 年藉由配色實驗的結果制定了配色(color matching function)函數和 RGB 色度系統，但由於 RGB 色度系統仍有缺點存在，經由修訂變後成為 XYZ 色度系統，稱為 CIE 1931 標準色度系統(CIE 1931 standard colorimetric system)，並且發佈 CIE 1931 色度圖 (CIE 1931 chromaticity diagram)。不過之後又依據實際應用需求情況或是補足 CIE 1931 色度圖不足的地方而進行修訂，隨後發表了 CIE 1960 色度圖及 CIE 1976 色度圖，但由於人們長期使用的習慣，所以 CIE 1931 色度圖至今仍然是使用最廣泛的標準。

3-1.1 CIE 1931 XYZ 色度系統

將兩種顏色調節到視覺上相同或相等的過程，稱作顏色匹配或配色，而色彩可以藉由色光的混色來實現。圖 3-1 為配色實驗原理圖，在後方的白屏幕上面有一個垂直的黑色隔板，將兩側做區隔，一側投射其他顏色的單色光或是白光，另一側則是投射紅、黃、藍三原色色光，人眼從遮幕的圓孔中觀察到兩側的顏色，藉由調節三原色光 RGB 的強度比例使兩側的顏色達到一致，如圖 3-2 所示。

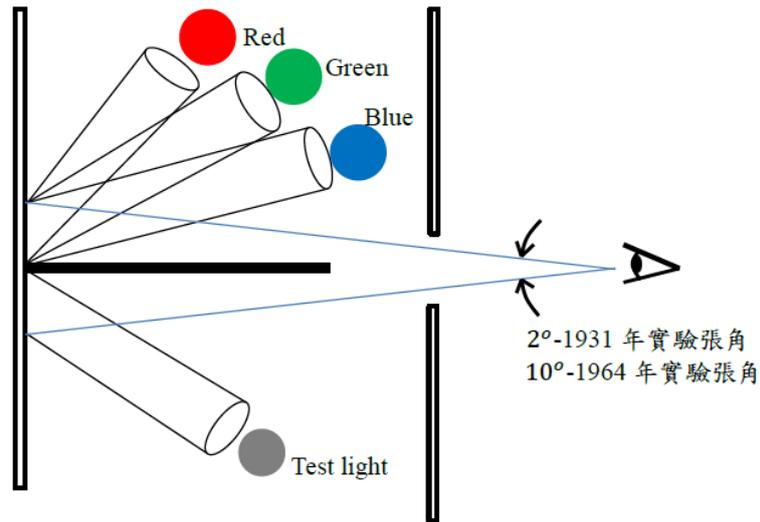


圖 3-1 配色實驗示意圖

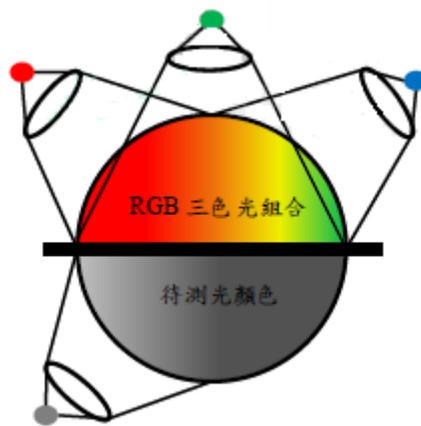


圖 3-2 配色實驗側面圖

CIE 在 1931 年分別以 700nm(R)、546.1nm(G)、435.8nm(B)三原色色光進行配光實驗，在實驗中得到匹配等能光譜中各單波長刺激所需要的三刺激值，稱作光譜三刺激值(spectral tristimulus value)。以波長函數型態繪製出光譜三刺激值則稱作配色函數 $\bar{x}(\lambda)$ 、 $\bar{y}(\lambda)$ 、 $\bar{z}(\lambda)$ ，如圖 3-3 所示。

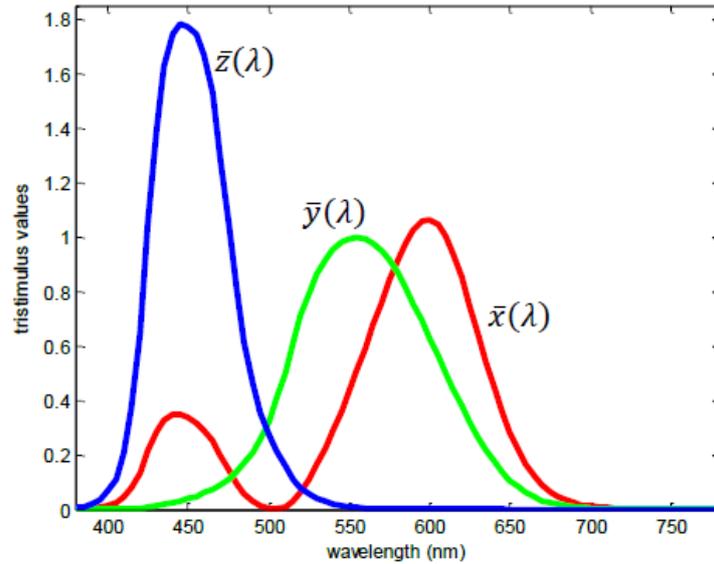


圖 3- 3 XYZ 色度系統的配色函數 $\bar{x}(\lambda)$ 、 $\bar{y}(\lambda)$ 、 $\bar{z}(\lambda)$

配色函數 $\bar{x}(\lambda)$ 、 $\bar{y}(\lambda)$ 、 $\bar{z}(\lambda)$ 曲線分別代表匹配各波長等能光譜刺激所需要的紅、綠、藍三原色的量，除此之外還有一個特徵，配色函數中的 $\bar{y}(\lambda)$ 與視效函數 $V(\lambda)$ 相等，所以三刺激值的Y值表示光度量的亮度(明度)，因此應用上會比較方便。

對於光源的光譜分布為 $P(\lambda)$ ，藉由加上配色函數 $\bar{x}(\lambda)$ 、 $\bar{y}(\lambda)$ 、 $\bar{z}(\lambda)$ ，求出各單色波長的三刺激值，在對波長進行積分，便可求出 XYZ 色度系統三刺激值 X、Y、Z，關係式為

$$X = k \int_{vis} P(\lambda) \cdot \bar{x}(\lambda) d\lambda \quad (3.1)$$

$$Y = k \int_{vis} P(\lambda) \cdot \bar{y}(\lambda) d\lambda \quad (3.2)$$

$$Z = k \int_{vis} P(\lambda) \cdot \bar{z}(\lambda) d\lambda \quad (3.3)$$

其中，k為常數，積分取自可見光波長區域。

若是觀察物體表面的反射光譜，則反射物體表示為 $P(\lambda) \cdot R(\lambda)$ ；反之，若是物體的透射光譜，則透射物體表示為 $P(\lambda) \cdot T(\lambda)$ 。其中， $P(\lambda)$ 為照射光源的光譜分布； $R(\lambda)$ 為反射物體的光譜反射率； $T(\lambda)$ 為透射物體的光譜透射率。因此以反

射體為例，反射物體的三刺激值 X、Y、Z 關係式為

$$X = k \int_{vis} P(\lambda) \cdot R(\lambda) \cdot \bar{x}(\lambda) d\lambda \quad (3.4)$$

$$Y = k \int_{vis} P(\lambda) \cdot R(\lambda) \cdot \bar{y}(\lambda) d\lambda \quad (3.5)$$

$$Z = k \int_{vis} P(\lambda) \cdot R(\lambda) \cdot \bar{z}(\lambda) d\lambda \quad (3.6)$$

其中，常數 k 為

$$k = \frac{100}{\int_{vis} P(\lambda) \cdot \bar{y}(\lambda) d\lambda} \quad (3.7)$$

常數 k 的選擇必須會使完全擴散反射面的三刺激值 Y 為 100，所以若物體的反射率或是透射率小於 1，則 Y 也會小於 100。因此三刺激值 Y 也稱為反射（透射）物體的光是反射（透射）率（luminous reflectance(transmittance)），與前面敘述 Y 值表示光度量的亮度(明度)有關。

但三維座標來表示色度座標並不方便，所以會將 X、Y、Z 歸一化後的色度座標來表示

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \quad (3.8)$$

$$y = \frac{Y}{X+Y+Z} \quad (3.9)$$

$$z = \frac{Z}{X+Y+Z} \quad (3.10)$$

又因為 $x+y+z=1$ ，所在色度圖上顯示以 (x, y) 為色度座標而繪製。同樣將配色函數中各單色光的三刺激值 X、Y、Z 藉由第(3.8)式、第(3.9)和第(3.10)式得到光譜色度座標，並按照單色光波長順序連接各個色度座標得到光譜軌跡，且連接單色光軌跡兩端的直線為純紫邊界，此為 XYZ 色度系統的 xy 色度圖，又稱為 CIE-1931 xy 色度圖或是 CIE-1931 色度圖，如圖 3-4 所示。

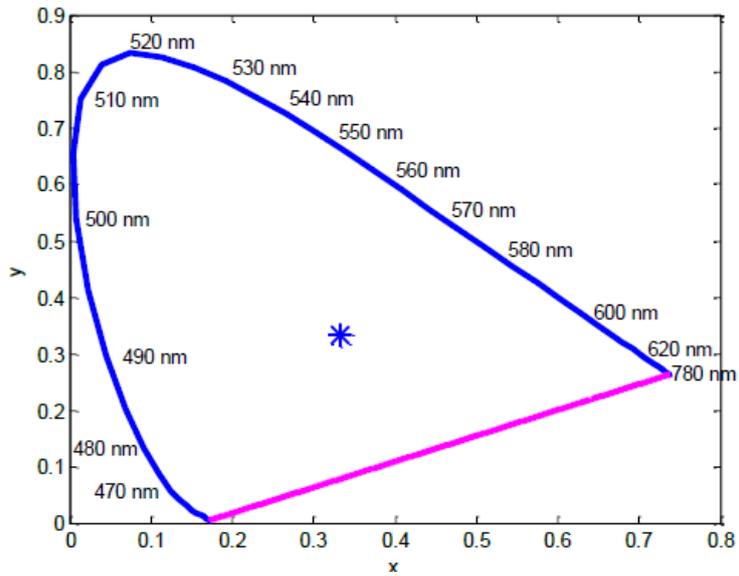


圖 3- 4 CIE-1931 色度圖

3-2 均等色彩空間

定量表示色覺的差異量稱為色差(color difference)，而在色度圖上，利用一個點(色度座標)來表示色彩，但是在真實人眼的視覺下，色度座標微小的變化量，並不會使人眼感到色彩的變化，因此對人眼而言，色彩的感覺為一個範圍而非一點。

D.L. MacAdam 提出在 CIE 1931 色度圖上選擇不同位置的 25 個色度座標進行配色實驗，確定各色度座標在各方向匹配範圍，稱為麥克爾當橢圓(MacAdam ellipses)，如圖 3-5 所示，橢圓範圍內代表人眼無法判別其色彩的差異性。

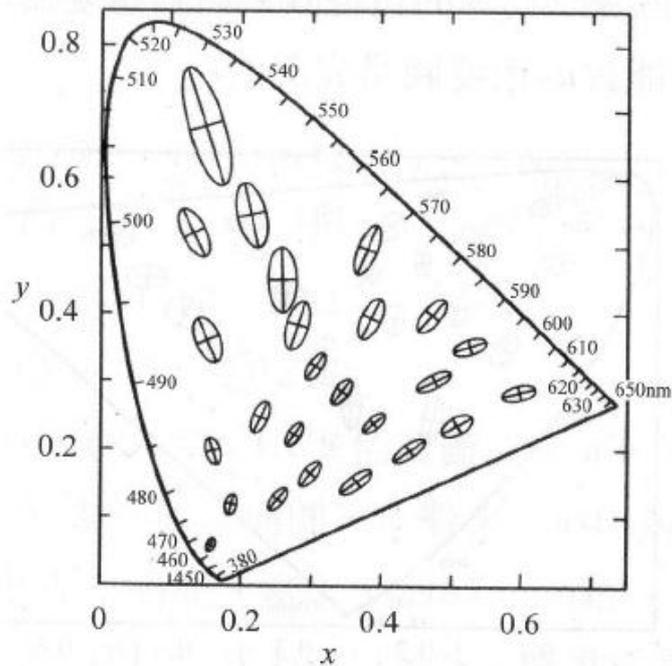


圖 3-5 CIE 1931 色度圖上麥克爾當橢圓(放大 10 倍)

從圖3-5可以看出麥克爾當橢圓的範圍大小不一致，證明CIE 1931色度圖有色度不均等的缺點，因此無法單純以座標位置計算兩色彩的差異度，也就是在CIE 1931色度圖中，不同位置上若A點到B點的距離與C點到D點的距離相等，正常來說色彩的差異量應該相同，但由於有色度不均等的缺點造成隨色度圖位置不同會有不同的差異量的現象。

為了克服 CIE 1931 色度圖的缺點，在應用上色彩差異程度與座標距離有成正比關係，或是在任何位置上麥克爾當橢圓都擁有相同半徑的圓，科學家紛紛投入研究色度圖的均等性問題。

3-2.1 CIE 1960 UCS 色度圖

CIE 在 1960 年根據 MacAdam 對於 CIE 1931 色度圖的不均等性進行了某種程度的改善，使得在色度圖上不同兩點間的距離與另外兩點間的距離相等時，其色彩的差異量也相等的色度圖，稱為均等色度圖(uniform-chromaticity-scale

diagram)’,或稱為 CIE 1960 UCS 色度圖(CIE 1960 UCS diagram)’,將 CIE 1931 XYZ 色度系統的色度座標 x 、 y 或是三刺激值 X 、 Y 、 Z 按照變換公式變成新的色度座標 u 、 v ，關係式為:

$$u = \frac{4x}{-2x+12y+3} = \frac{4X}{X+15Y+3Z} \quad (3.11)$$

$$v = \frac{6y}{-2x+12y+3} = \frac{6Y}{X+15Y+3Z} \quad (3.12)$$

也由於色度圖所採用色度座標 u 、 v ，所以又稱為 uv 色度圖，如圖 4.10 所示。

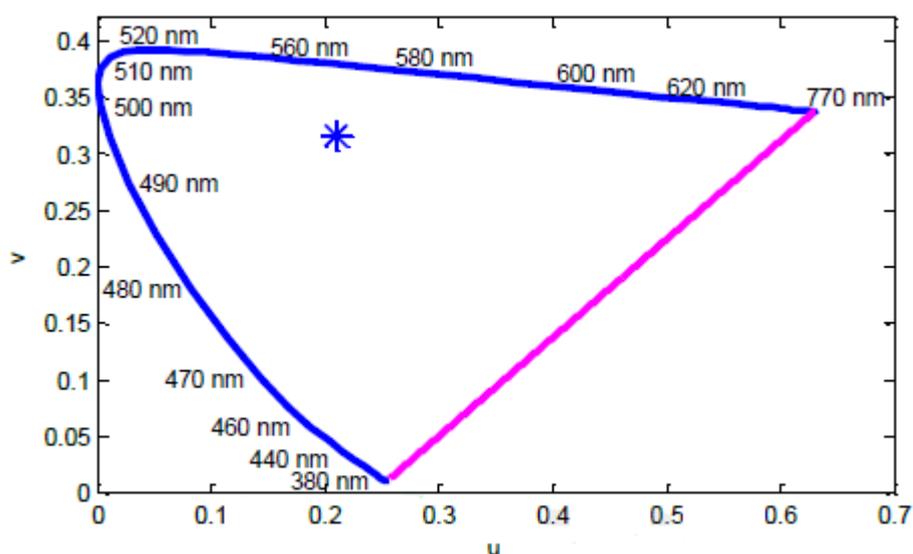


圖 3- 6 CIE 1960 UCS 色度圖

3-3 色溫與相關色溫

光源所發出的光是由不同波長(頻率)的輻射電磁波組成的，依照波長(頻率)的順序繪製各波長(頻率)的輻射功率，稱此圖為光譜功率分布，或是光譜。不同的光源組成的光譜圖都不一樣。除了利用三刺激值或是色度座標指出光源的顏色以外，還有一種方式可以去描述光源的顏色，利用「黑體輻射」(blackbody radiation)的顏色來描述光源的顏色。

黑體(或稱完全輻射體)是一個理想化的物體，它能完全吸收外來的輻射，既不反射也不透射，且當物體隨著溫度上升便會產生輻射，稱為黑體輻射，其單位

面積輻射的光譜功率大小與分布完全取決於它的溫度，依照蒲朗克輻射定律 (Planck's law of radiation)，可以對不同黑體輻射溫度 T_c 計算出光譜輻射分布，單位為 $W \cdot m^{-3}$ ，關係式為

$$M_{black}(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5 [\exp(c_2/\lambda T_c) - 1]} \quad (3.13)$$

其中，

$$c_1 = 3.741832 \times 10^{-16} \text{ (W} \cdot \text{m}^{-3}\text{)};$$

$$c_2 = 1.4388 \times 10^{-2} \text{ (m} \cdot \text{K)};$$

λ ：波長，單位m。

當溫度不斷的上升，它的最大光譜輻射功率也會隨著急遽上升，且光譜分布的最大光譜輻射部分將會向短波長方向位移，如圖3-7所示，所以顯示出來光的顏色會隨溫度由紅變黃，漸漸地轉為白，最後會有點偏藍色。因此這種方法就是利用黑體加熱到不同溫度所發出不同的光顏色來代表一個光源的顏色，這稱為色溫(color temperature)。也就是說當光源的顏色與在溫度 T_c 時黑體輻射的顏色一樣，則定義此光源的色溫為 T_c ，其單位以絕對溫度(absolute temperature)表示，又稱為卡式溫度(Kelvin, K)。

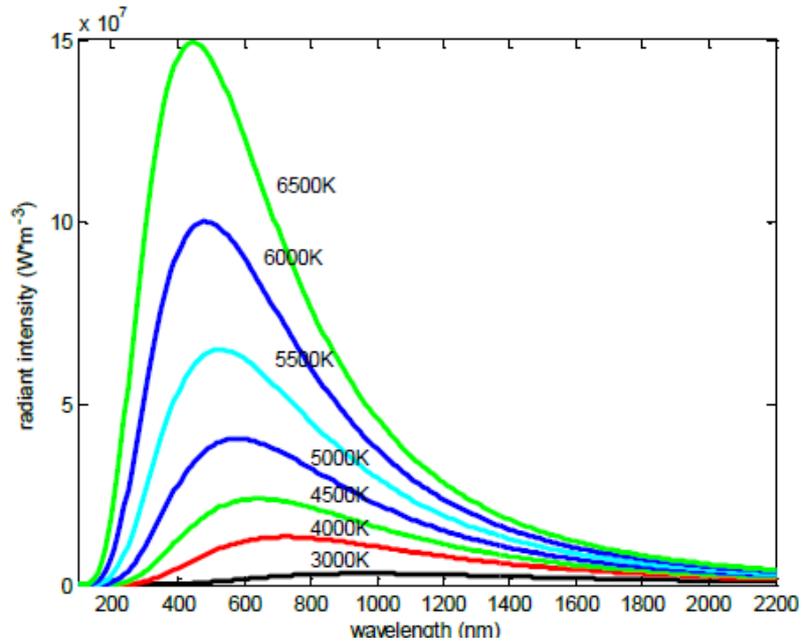


圖 3-7 黑體輻射圖

將一系列不同絕對溫度的黑體輻射色度座標在色度圖上標記並連線，其曲線稱為黑體軌跡或是蒲朗克軌跡(Planckian locus)，因此色溫可以藉由色度座標落在黑體軌跡上所對應到的絕對溫度得知。就目前照明光源裡的白熾燈和鹵素燈是透過加熱而產生輻射和光，近似於黑體加熱，所以光譜近似於黑體輻射的光譜功率分布，且色度座標剛好落在黑體軌跡上，但其他的光源，例如螢光燈等等，色度座標並不一定準確落在色度圖上的黑體軌跡上，通常會落在黑體軌跡附近，所以會利用該光源與黑體軌跡最接近的顏色來確定該光源的顏色，此定義為相關色溫(correlated color temperature, CCT)。

在CIE 1931色度圖上，由於色度空間不均等，所以黑體軌跡上各色溫色度座標並不是按照等距離分布，所以難以確定色度座標落在黑體軌跡附近的光源之相關色溫。而因為CIE 1960 UCS色度圖色度均等性比CIE 1931色度圖好，所以黑體軌跡上各色溫色度座標是等距離分布，且為了確定不在黑體軌跡上的光源之相關色溫的判定，在黑體軌跡上會延伸許多條等色溫線(isotemperature line)，而黑體軌跡與等色溫線是互相垂直，如圖3-8所示。若將其變換到CIE 1931色度圖的結果

如圖3-9所示。所以在色溫或相關色溫的判斷上CIE 1960 UCS色度圖比CIE 1931色度圖更為精準。

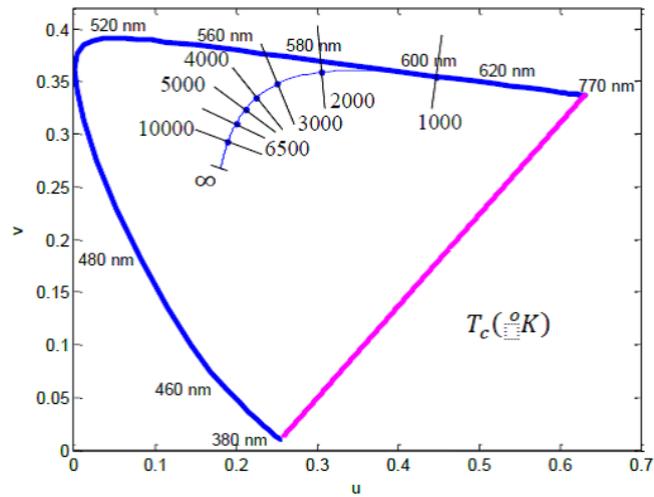


圖 3- 8 CIE 1960 UCS 色度圖黑體軌跡及等色溫線

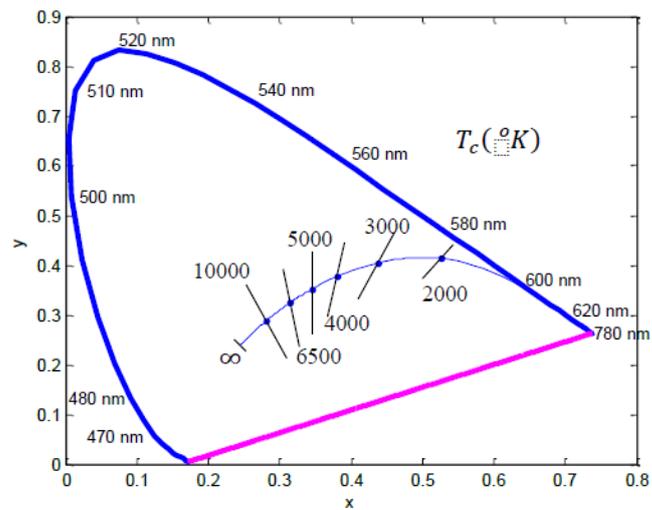


圖 3- 9 CIE 1931 色度圖黑體軌跡及等色溫線

而相關色溫(CCT)也可藉由McCamy提出簡易的計算方式，由色度座標x、y 求出，關係式為

$$CCT = -449n^3 + 3525n^2 - 6823.3n + 5520.33 \quad (3.14)$$

其中， $n = (x - 0.3320) / (y - 0.1858)$ 。

3-4 演色性

從古自今，人類在大自然的底下過著日出而作，日落而息的生活習慣，逐漸的夜晚也會使用火來取得明亮，火發出光的光譜功率分布類似色溫低的日光，例如黃昏或黎明的時候，在這樣的日光照射的條件下，不同時間或季節的日光光譜功率分布和色溫也隨著變化，但人眼視覺機制卻不受到很大的影響，而仍然可以正常分辨顏色，這是因為人眼具有適應的能力，所以在日光下人眼的色彩視覺是恆定的，稱為色彩恆定性(color constancy)，這是人類長期生活所演化的結果。

目前照明光源只有白熾燈與鹵素燈類似火光一樣是熾熱發光體，所以將白熾燈、鹵素燈與日光作為參考光源，以其照射物體所呈現的顏色為真實的顏色。雖然近年來螢光燈、鈉燈以及LED等等新式照明光源被開發出來，其色溫與光的顏色可能與參考光源相似，但光源的光譜功率分布卻有極大的差異，所以當以這些光源去照射相同物體時，所呈現出來的顏色可能與在參考光源下相差很大。將物體在待測光源與參考光源照射下所呈現顏色上的差異性稱為演色性(color rendering property)或稱演色指數(color rendering index)，簡稱CRI。

光源的色溫與演色性無必然的關聯，因為即使色溫相同，可是光源的光譜功率分布也可能不完全相同，所以光源的光譜功率分布決定了光源的演色性，而白熾燈與鹵素燈具有與日光相似的連續光譜，所以擁有較好的演色性，反之，若光源為高壓汞燈，其光譜功率分布與日光相差甚大，所以儘管有較高的發光效率，但演色性極差，所以當用它照射物體時，人眼所接受的色彩會發生改變，例如粉紅色變成紫色等等。而演色指數從0到100，當數值越接近100代表其光源特性越接近日光，演色性極佳，反之，演色性越低代表色彩失真的越厲害，演色性極差。

為了去衡量其他各種已知的待測光源所產生照明下的效果，CIE規範了參考光源來代替日光，原則上當光源為低色溫光源($\leq 5000\text{K}$)時，參考標準是使用蒲朗

克輻射體，而高色溫光源($\geq 5000\text{K}$)時，則使用標準照明體D當作參考標準。除此之外，CIE對於演色性制定了15種色票，利用光源對這15種色票的顯色程度來定義演色指數。演色指數表示分為平均演色指數(general color rendering index)和特殊演色指數(special color rendering index)，各種特定色票的演色指數稱為「特殊演色指數」，以R1~R15表示，一般優先使用R9~R15。而一般演色性採用「平均演色性指數」，是將R1到R8的特殊演色指數取平均值，以Ra表示。

在一些要求顏色辨識的場所，例如紡織廠、印刷廠以及醫療手術房等等，演色性的好壞非常重要，若這些場所照明設備的演色性很差，會因為無法表達真實的顏色，而造成印刷顏色錯誤，或是因為醫生無法辨別血管或器官的位置而造成手術失誤等等問題。除此之外，對於電視節目、電影以及顯示器也會有影響，拍攝現場的燈光演色性要是很差，會造成拍攝畫面的色彩失真，影響電影或是顯示器的顏色還原效果，所以以上種種例子可以了解到演色性的重要性。

3-4.1 色票

CIE-13.3:1995「Method of Measuring and Specifying Colour Rendering Properties of Light Sources」的技術文件中制訂了14種色票來做為演色指數計算用的試驗色，如表3.1所示。色票No.1~ No.8為孟塞爾表色系統中的中彩度，中明度的顏色，是多種物體色的平均代表樣本，其為「平均演色指數」的指標，如圖3-10、圖3-11所示為色票No.1~ No.8的反射頻譜。而其餘色票No.9~ No.14為重要的物體色代表，如圖3-12、圖3-13所示為色票No.9~ No.15的反射頻譜。例如No.9~ No.12為代表性紅、黃、綠、藍高彩度色，尤其No.9為人體血的顏色，所以對於手術燈而言No.9的演色性值非常重要。No.13、No.14為白種人膚色和葉綠色。近年來，色票No.15為JIS所採用，它代表日本女性的平均臉部膚色。

表 3. 1 CIE-13.3:1995 制定的色票 No.1~ No.15 資訊

Name	Color	Approximate Munsell notation	Appearance under daylight
R_1		7.5 R 6/4	Light greyish red
R_2		5 Y 6/4	Dark greyish yellow
R_3		5 GY 6/8	Strong yellow green
R_4		2.5 G 6/6	Moderate yellowish green
R_5		10 BG 6/4	Light bluish green
R_6		5 PB 6/8	Light blue
R_7		2.5 P 6/8	Light violet
R_8		10 P 6/8	Light reddish purple
R_9		4.5 R 4/13	Strong red
R_{10}		5 Y 8/10	Strong yellow
R_{11}		4.5 G 5/8	Strong green
R_{12}		3 PB 3/11	Strong blue
R_{13}		5 YR 8/4	Light yellowish pink
R_{14}		5 GY 4/4	Moderate olive green (leaf green)
R_{15}		1 YR 6/4	Asian skin

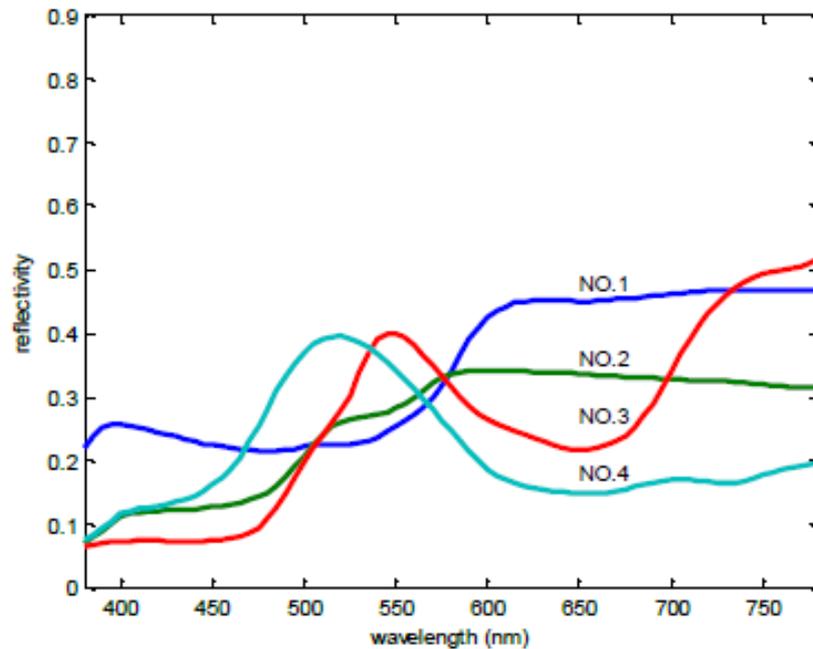


圖 3- 10 色票 No.1~ No.4 的反射頻譜

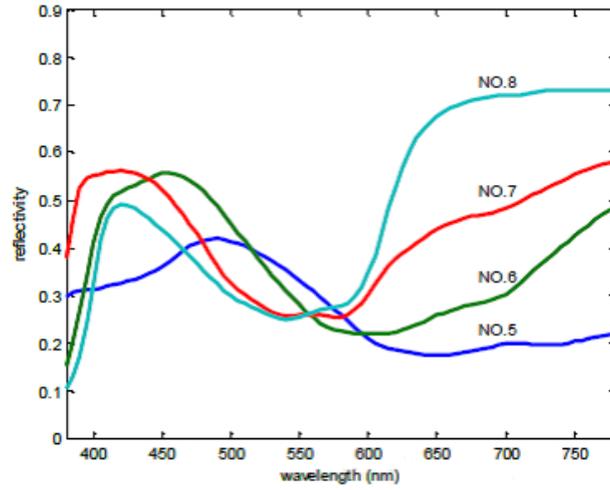


圖 3- 11 色票 No.5~ No.8 的反射頻譜

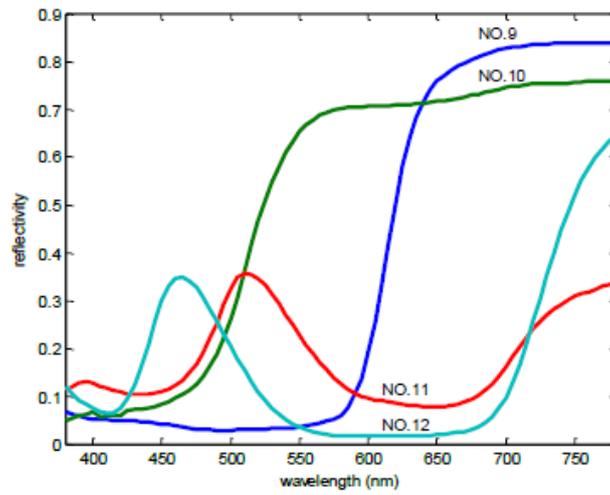


圖 3- 12 色票 No.9~ No.12 的反射頻譜

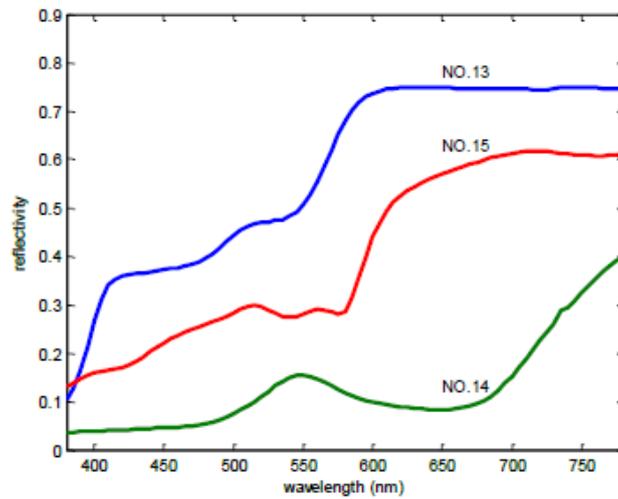


圖 3- 13 色票 No.13~ No.15 的反射頻譜

第四章 LightTools 螢光粉模擬[5]

螢光粉光致發光的過程，是先由材料吸收特定光譜的光，再發射出具有另一光譜的光，而發射光的光譜會分布在波長較長的範圍。因為螢光粉式（phosphor-based）白光 LED 效能的提升，使得螢光粉愈來愈普遍的被使用在照明設計領域，而為了確保此類照明設計的模擬準確性，精確地模擬螢光粉光學特性是十分重要的。以下闡述 LightTools 輸入參數與理論模型間的關係，藉以描述 LightTools 進行螢光粉模擬的方法，並說明下章節所使用的模型之參數輸入值。

4-1 螢光粉

能量守恆定律指出，當光被材料吸收後，必定會有能量的轉移，多數的材料會將此能量轉換成熱的形式。然而，光致發光材料除了將部分能量轉換成熱外，更會將其餘的部分轉換成波長較長的光。利用電子能帶圖可表示此概念，如圖 4-1 所示。

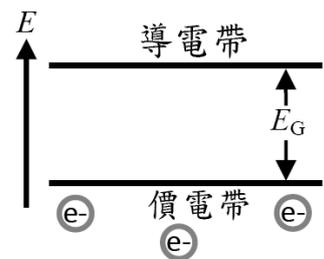


圖 4-1 電子能帶圖

電子以不連續的軌道圍繞著原子核旋轉，而類似的能量結構同樣存在於許多材料中，只是不同於原子中的不連續能階，分子結構中所存在的是電子能帶。價電帶（Valence band）是較低的穩定態，如圖 4-1 下方的基線，而導電帶（Conduction band）則是一個較高的態，如圖中較高的水平線，此態的電子

可在材料中自由移動，圖中垂直軸代表能階，愈上方的能階代表愈高的能量。圖中介於價電帶及導電帶中間的能階差，稱為能隙 E_G ，能隙的大小由材料的原子結構所決定。通常，螢光粉設計者會在螢光粉晶體中加入雜質（稱為摻雜），用以調整材料的能隙，使之能吸收及發射出特定波長的光。圖 4-2 中以簡單的幾個階段，描述光致發光的過程。

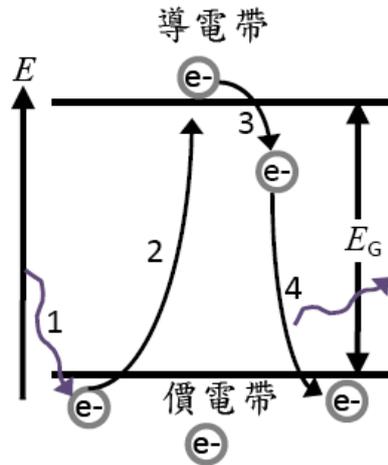


圖 4-2 光至發光過程

階段 1 中光子被材料吸收，而若光子的能量等於 E_G ，則價電帶上的電子可躍遷至導電帶，如圖中階段 2。入射光子的能量 E_{in} 可由入射光的波長計算，如下式。

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (4.1)$$

實際上，導電帶的上方或下方存在著許多的次激發態，這些額外的次激發態使材料能接受能量不完全相等於能隙的光子，因此可由被材料吸收的這一組波長，定義出螢光粉的吸收光譜。

經過一段時間後，被激發的電子會回到它的基態，並伴隨著能量的釋放。若材料的能量釋放會持續一段時間（數分鐘或數小時），則此材料為磷光材料（phosphorescent）。若能量幾乎在瞬間就被釋放，則為螢光材料（fluorescent），而通常使用在照明系統中的螢光粉即為螢光材料。

在大部分情況下，電子不會直接從激發態回到基態，而是先經過數個次激發態後才回到基態，如圖 2 中的階段 3 及階段 4 所示。在較小的過渡區中，能量僅以熱的形式釋放，而較大的過渡區則可釋放出可見光範圍的光子。然而，由於階段 4 中釋放的能量總合小於被吸收的光子能量，因此，發射的波長永遠比被吸收的光子波長更長，而吸收及發射光子間的能量差即為 Stoke's Shift。而實際上，晶體中另外還存在著一些非輻射形式的損失。

根據前面對於螢光粉及光子交互作用的描述，可以寫出螢光粉的能量平衡方程式。為了滿足螢光粉的能量守恆，能量平衡方程式必需遵守下式。

$$E_{in} = E_{out} \quad (4.2)$$

其中 E_{out} 又可拆解為兩個部分，分別是材料吸收的能量以及直接被散射的未吸收能量，而吸收能量 E_{α} 由吸收光譜控制。

$$E_{in} = E_{unabsorbed} + E_{\alpha} \quad (4.3)$$

並非所有被螢光粉吸收的能量都會以光的形式再度發射，被吸收的波長中，會使光線再度發射的部分稱為激發光譜，因此，激發光譜會是吸收光譜的子集。

圖 4-3 為 LightTools 中螢光粉的預設激發光譜。

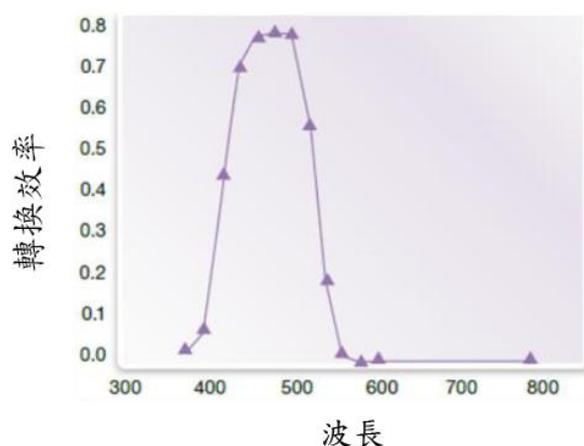


圖 4- 3 LightTools 預設的激發光譜

發射光的波長會比被吸收光的波長還長，並可由螢光粉發射光的波長定義出發射光譜。發射光譜為被吸收光的波長的函數，一般而言不會有很大的改變，圖 4-4 為 LightTools 中螢光粉的預設發射光譜。

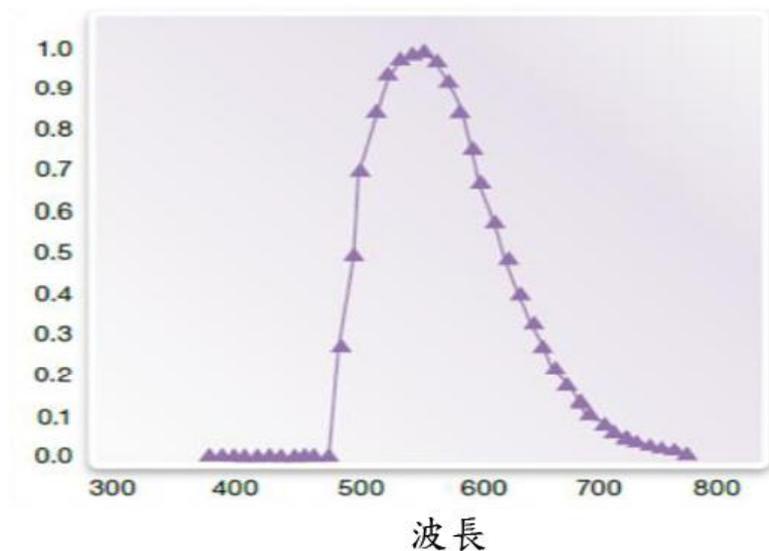


圖 4-4 LightTools 預設的發射光譜

被吸收的能量中未轉換為發射光譜的部分，會轉換為熱或其他非輻射的形式，熱能部分為 Stoke's Shift，以 E_{SS} 表示，非輻射能量則以 E_{nonRad} 表示，如下式所示。

$$E_{\alpha} = E_{SS} + E_{converted} + E_{nonRad} \quad (4.4)$$

將式子(4.4) 代入式子(4.3)，則可得出完整的能量平衡方程式，如：

$$E_{in} = E_{unabsorbed} + E_{SS} + E_{converted} + E_{nonRad} \quad (4.5)$$

LightTools 模擬結果為瞬時態的準確呈現，但實際上，能量會隨時間而變化，所以此論文中，將以非時變的功率(Power, ϕ)，取代隨時變的能量(Energy, E)，其中，功率為單位時間內的光能。進行取代後，式子(4.5)將更改如式子(4.6)：

$$\phi_{in} = \phi_{unabsorbed} + \phi_{SS} + \phi_{converted} + \phi_{nonRad} \quad (4.6)$$

4-2 LightTools 中的螢光粉

LightTools 提供模擬螢光粉的功能，可藉由在自訂材料中加入懸浮的螢光粉粒子來進行螢光粉的模型建構。

在 LightTools 中需要設定多項的參數，才能建立一個準確的螢光粉模型，若要了解每一項須設定的參數，可以先考慮光線追跡時的能量平衡。LightTools 會在材料中進行光線傳播，直到光線離開材料或是擊中螢光粉粒子，而因為 LightTools 是以隨機的方式進行光線模擬，因此也是以機率的方式決定每一條擊中螢光粉粒子的光線的能量平衡。

4-3 光線追跡的功率平衡

考慮一條具有功率 Φ_0 、波長 λ_0 的光線，進入螢光粉材料。在材料內的傳播過程中，會依螢光粉粒子間的平均自由程決定未擊中螢光粉的平均距離，另外，也可在 LightTools 中定義材料內惰性粒子的平均自由程，LightTools 也會依此定義自動地計算擊中惰性粒子的機率。若光線擊中惰性粒子，則會依惰性粒子散射強度函數來決定散射分布。

若光線擊中螢光粉粒子，則 LightTools 會先以吸收光譜 $(\alpha(\lambda))$ 來決定光線是否被吸收。須注意的是，螢光粉粒子的吸收光譜與 LightTools 中其他吸收係數不同，螢光粉的吸收光譜，並不意謂著功率的損失。若利用前面所提到的電子能帶圖來比喻，吸收光譜用以決定入射光線的波長是否符合能讓電子躍遷能隙的波長。而被吸收的能量，有可能不會再度發射而就此消失，也有可能會再度發射，這則會由激發光譜或量子產率來決定。若光線未被吸收 $(\alpha(\lambda) = 0)$ ，則會以未轉換光線的密度分布來決定光線離開粒子的傳播方向。

其餘的能量平衡取決於選擇使用激發光譜或是量子產率，若使用激發光譜，則 LightTools 假定激發光譜中已包含 Stoke's Shift；若使用量子產率，則

LightTools 將自動動態計算 Stoke's Shift 造成的損耗。

4-4 使用激發光譜時的功率平衡

若光線被吸收，則 LightTools 依激發光譜($E_x(\lambda)$)決定光線是否會從粒子再次發射。若光線並未再次發射($E_x(\lambda)=0$)，則光線會停止繼續追跡並損耗功率 Φ_0 。若光線再次發射，則該入射波長所對應發射光譜($Em_{\lambda_0}(\lambda)$)的總功率，會是入射光線功率的一部分，發射光線功率與入射光線功率關係如下所示。

$$\Phi_{Em} = \Phi_0 \cdot E_x(\lambda_0) \cdot \alpha(\lambda_0) \quad (4.7)$$

接著，利用對應至該吸收波長($Em_{\lambda_0}(\lambda)$)的發射光譜，以機率方式自光譜功率分布(Spectral Power Distribution, SPD)中選擇發射的波長及功率，並從粒子等向地(isotropically)發射新的發射新的光線，其中，光譜功率分布須滿足下式：

$$\Phi_{Em} = \int_{-\infty}^{\infty} Em_{\lambda_0}(\lambda) d\lambda \quad (4.8)$$

雖然(4.7 式)及(4.8 式)看似並未涵蓋 Stoke's shift，但事實上，Stoke's shift 已包含於其中。原因是，激發光譜的定義為吸收功率中被轉換的百分比，而 Stoke's shift 及非輻射損耗也是吸收功率的百分比，即 $1-E_x(\lambda)$ 。因此，LightTools 利用激發光譜作為縮放係數，而光線的功率將依 Stoke's Shift 及非輻射損耗而減少。

4-5 使用量子產率時的功率平衡

使用量子產率時，當光線被螢光粉粒吸收後，LightTools 利用量子產率 $QY(\lambda)$ 決定光線是否再度被發射。如同討論激發光譜時所提，若 $QY(\lambda)=0$ ，則光線會停止繼續追跡且損失其功率。除此之外，LightTools 會依入射波長的發射光譜，以機率方式選擇發射光線的波長(λ_1)，而發射光線的能量(Φ_1)關係式如下所示。

$$\phi_1 = \phi_0 \cdot \alpha(\lambda_0) \cdot QY(\lambda_0) \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (4.9)$$

其中： $\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ 為 Stoke's shift。

4-6 在 LightTools 的使用者介面中建立螢光粉材料

依以下三個步驟在 LightTools 中建立螢光粉材料：

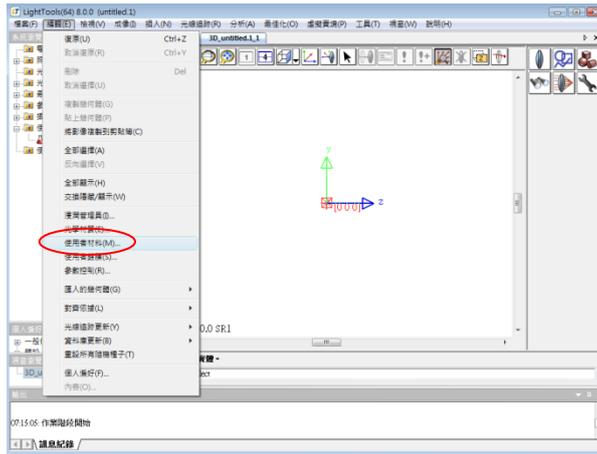
1. 產生新的使用者材料。
2. 在新的使用者材料中新增一個或多個螢光粉粒子。
3. 設定個螢光粉粒子的物理及光學特性。

這些步驟將在後面的章節做進一步的介紹。

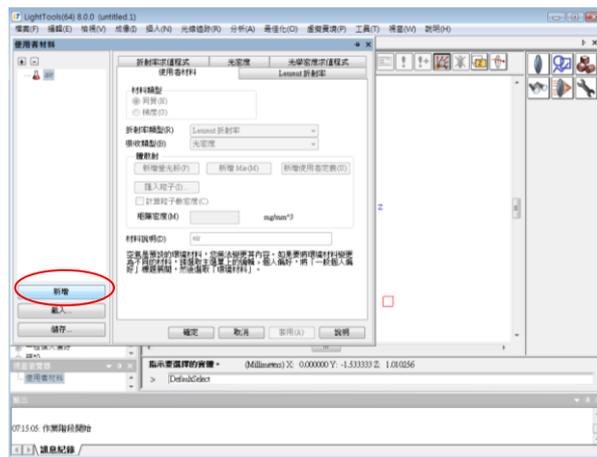
當我們建立完這些材料後，我們就能夠在我們已經建立好的 LED 螢光粉層的區域，使用我們自己建立出來的材料，此外若再加上一表面光源，即晶片，就完成了第五章的 LED 模型。

4-6.1 新增使用者材料

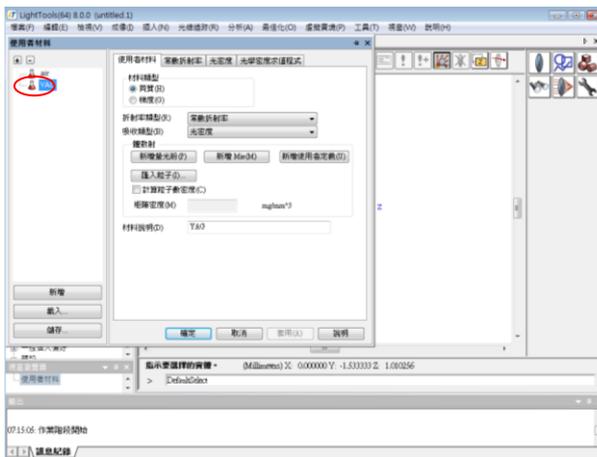
執行 LightTools，從編輯功能選單中，選擇使用者材料，如圖 4-5(a)所示。在使用者材料對話視窗中，點選左下方的新增按鈕，如圖 4-5(b)所示。當新的材料加入到使用者材料的清單後，可立即修改名稱。由於我們所與模擬的是黃色螢光粉，故暫且取名為 YAG，如圖 4-5(c)所示。接著在此視窗的子項目中點選常數折射率，並將值改為 1.5，此即為封裝膠的折射率。



(a)



(b)

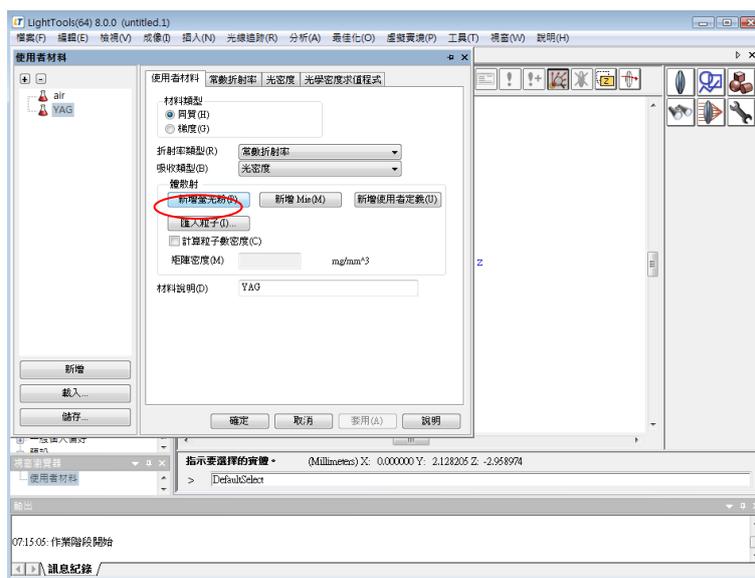


(c)

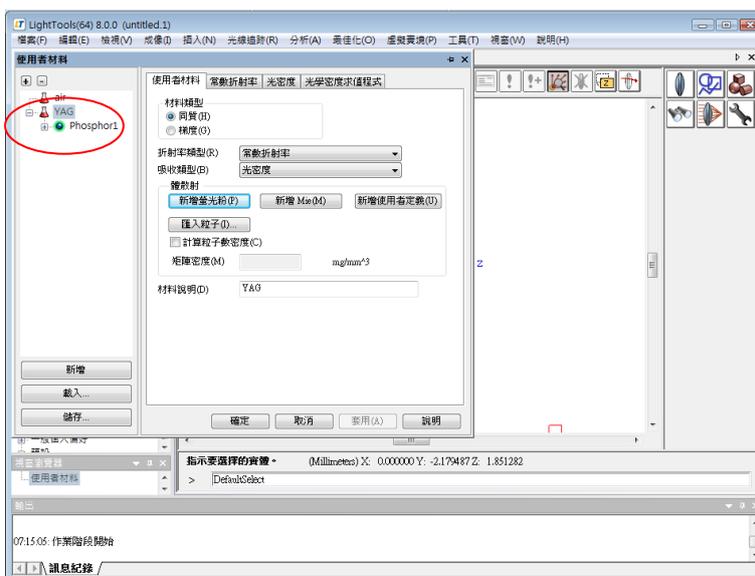
圖 4-5 新增使用者材料

4-6.2 新增螢光粉粒子

點選使用者材料對話視窗中的材料，接著點擊使用者材料分頁中的新增螢光粉按鈕，即可在使用者材料中增加螢光粉粒子，如圖 4-6(a)所示。螢光粉粒子已新增至樹狀列表中的使用者材料子項目，如圖 4-6(b)所示。藉由點擊新增螢光粉的按鈕，可以在任何的使用者材料中增加一種以上的螢光粉粒子。若是點擊新增 Mie 或新增使用者定義按鈕，則可以增加惰性粒子至材料中。



(a)



(b)

圖 4-6 新增光粉粒子

4-6.3 設定螢光粉粒子參數

LightTools 的螢光粉粒子需要輸入幾項必要的參數如下：

1. 平均自由程
2. 吸收光譜
3. 激發光譜/量子產率
4. 發射光譜
5. 未轉換光線的密度分布
6. 粒子產生的光線數

在使用材料對話視窗中，選擇材料子項目的螢光粉即可修改螢光粉粒子的各項設定，如圖 4-7 所示。

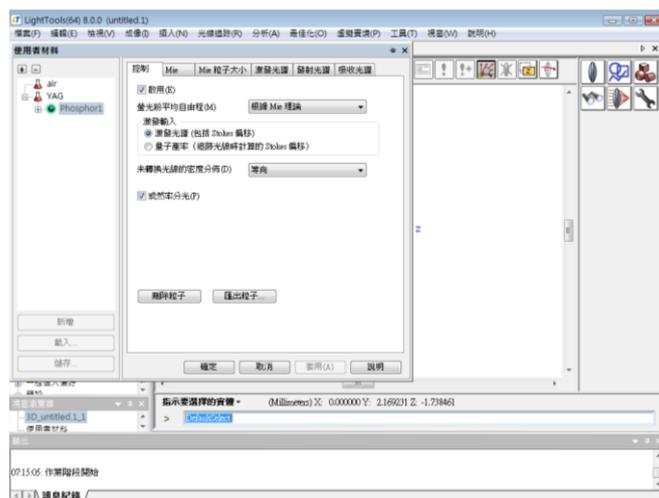


圖 4-7 點選螢光粒子即可顯示其各項參數

一、設定螢光粒子的平均自由程：

平均自由程的定義為光線通過材料而未擊中螢光粉粒子的平均路徑長(mm)，平均自由程可以利用螢光粉粒子的有效截面積 (mm^2)，和主材料中每單位體積的螢光粉粒子數（也稱為粒子密度）計算，如下所示：

$$l = \frac{1}{n\sigma_{\text{eff}}} \quad (4.10)$$

其中 l =平均自由程、 n =粒子密度、 σ_{eff} =有效截面積。

LightTools有三種平均自由程可供選擇，如圖4-8所示。

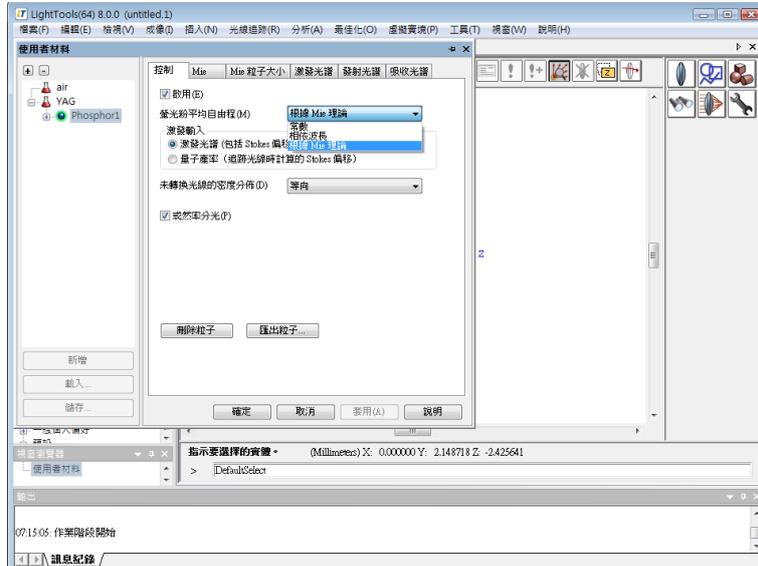


圖 4-8 平均自由程的設定可以選擇常數、相依波長或根據 Mie 理論

預設選項為根據 Mie 理論，此選項利用著名的體散射理論，根據球體粒子的分布密度大小與折射率計算平均自由程。若使用根據 Mie 理論，則需於 Mie 頁籤中設定粒子數密度與折射率，如圖 4-9 所示。

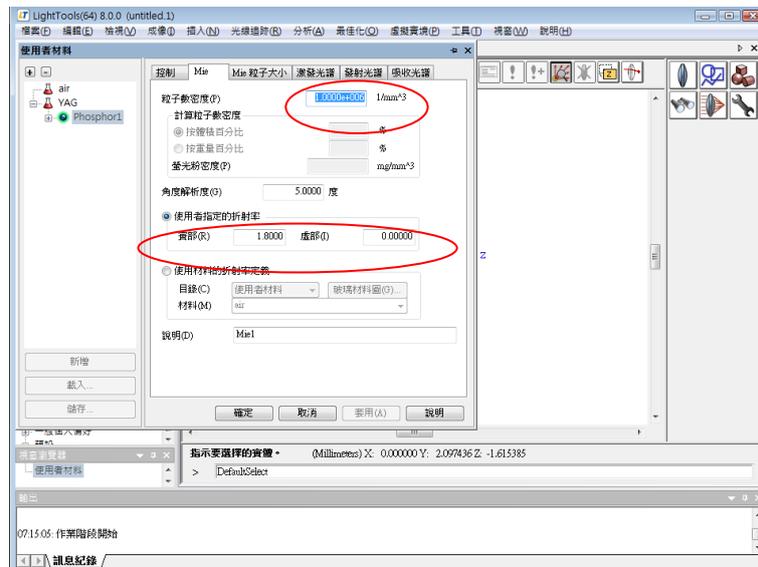


圖 4-9 Mie 頁籤中需設定粒子數密度與折射率

Mie 粒子的折射率提供複數形式的設定;若使用虛部的折射率則表示粒子具

有吸收光線的特性，但與螢光粉的吸收光譜會互相衝突。因此，任何使用 Mie 參數的螢光粉，會忽略粒子的複數折射率所造成的吸收。

當根據 Mie 氏解利用粒子的複數折射率來計算平均自由程時，式子(4.10)將進行修改以補償吸收截面積，結果方程式為式子(4.11)，其中包含波長相依的散射截面積和吸收截面積。

$$l = \frac{1}{n(\sigma_{abs} + \sigma_{scat})} \quad (4.11)$$

其中, l = 平均自由程、 n = 粒子數密度、 σ_{scat} = 散射截面積、 σ_{abs} = 吸收截面積。

此外, 粒子大小的分布必須設定於 Mie 粒子大小頁籤中, 如圖 4-10 所示。由於 Mie 理論假設粒子是微小球體, 因此粒子大小以半徑表示, 粒子大小的分佈也可以利用外部檔案進行載入。

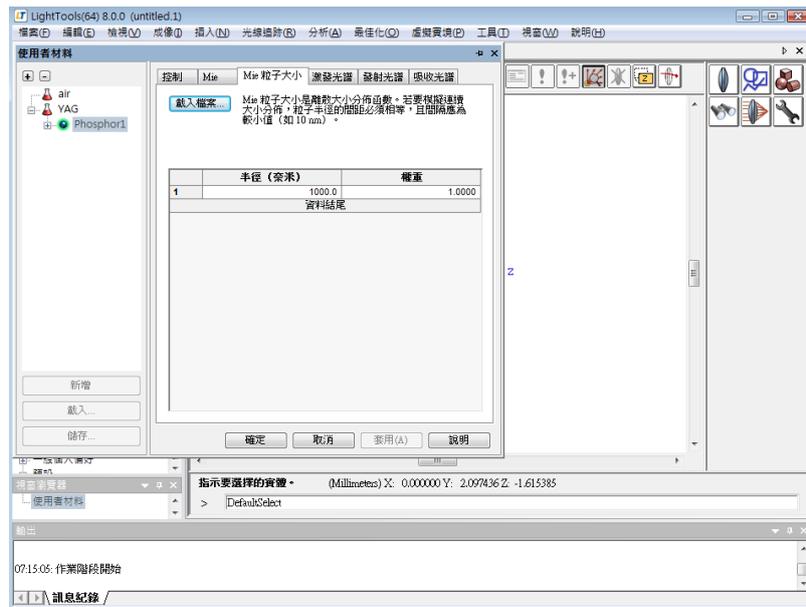


圖 4-10 在 Mie 粒子大小頁籤中，設定粒子大小的分布

當平均自由程選擇為常數時，在平均自由程頁籤中，只需設定單一的值。若選擇相依波長，在平均自由程頁籤中，則包含波長和相對應的平均自由程(MFP 值)表格，如圖 4-11 所示。

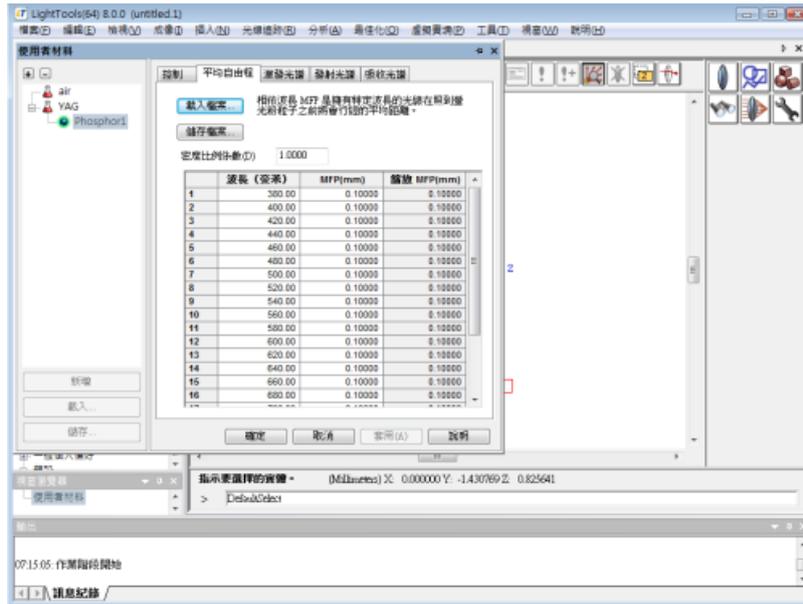


圖 4-11 與波長相依的平均自由程設定

在此頁籤中可以輸入密度比例係數，以改變平均自由程的絕對值，但數值曲線的相對形狀並不會被改變，比例係數可應用於粒子數密度改變時。由式子(4.10)可知，平均自由程和粒子數密度成反比關係；若粒子的大小固定而密度加倍，則平均自由程減半。當使用波長相依的平均自由程時，此功能允許您修改或最佳化較容易被量測的密度值。

在第五章的模型中，所採用的平均自由程為根據 MIE 理論所決定。

二、吸收光譜:

吸收光譜 $\alpha(\lambda)$ 是光打到螢光粉粒子而被吸收的機率函數，此函數為波長相依函數。吸收光譜所定義的波長應該為 LightTools 模型的追蹤波長子集，而光譜值的範圍介於 0 到 1 之間，當值為 1 時，代表螢光粉粒子會 100%吸收對應波長的光。

在吸收光譜頁籤中可以手動輸入波長相依的吸收光譜，如圖 4-12 所示，或載入外部檔案一次定義所有的值。

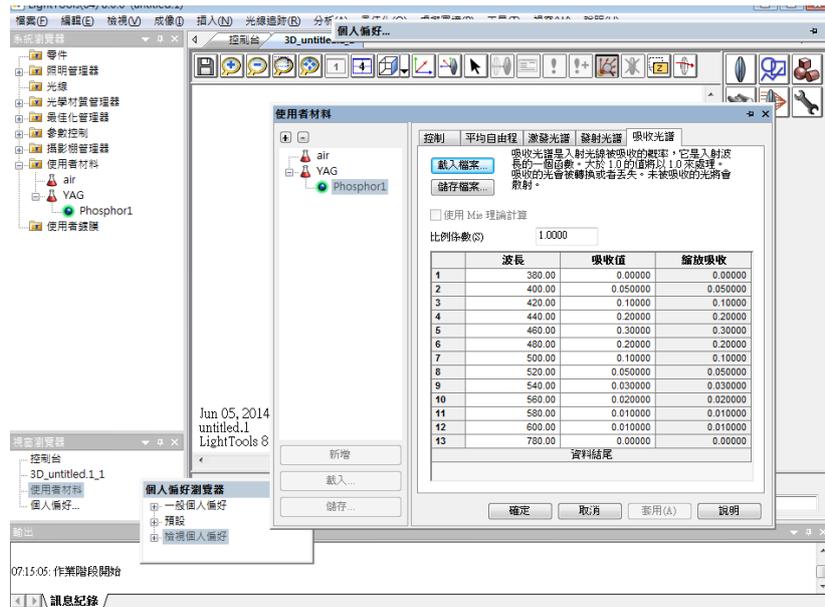


圖 4-12 吸收光譜頁籤

亦可使用Mie 理論計算吸收光譜，若將吸收光譜頁籤中的「使用Mie 理論計算」選項勾選，則不需要再設定吸收光譜。

在第五章的模型中，所採用的吸收光譜是利用 LightTools 中，個人偏好>光譜區，輸入高斯半高全寬與中心波長後，得到的平滑數值，修改後再複製至吸收光譜而得，而半高全寬與中心波長是由物理學報所提供的圖形(圖 4-13)目測而得。

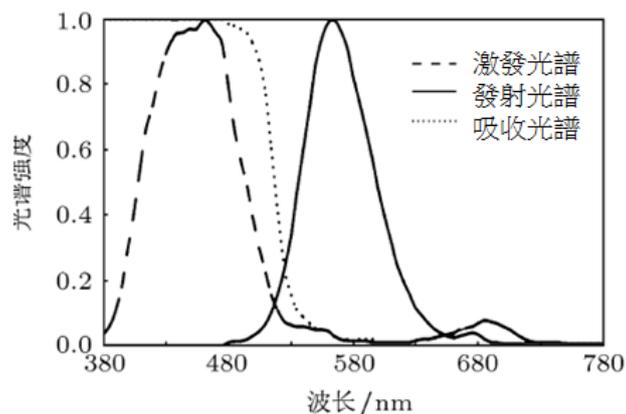


圖 4-13 螢光粉的激發、發射與吸收光譜

三、激發光譜/量子產率:

激發光譜和量子產率皆具波長相依的關係，可定義特定波長的吸收光線再次放射的百分比例，定義激發光譜或量子產率的波長組必須在吸收光譜的波長範圍內。激發光譜值可以是任何正數（由 0 到 ∞ ），當值為 1 表示，螢光粉吸收的光線 100% 會發生轉換。量子產率的值域也是由 0 到 ∞ ；和激發光譜不一樣的是，當量子產率為 1 時，表示系統中只有 Stoke's Shift 的損耗。圖 4-14 為激發光譜頁籤，圖 4-15 為量子產率頁籤。

激發光譜是吸收的光轉換為螢光的絕對轉換效率，是激發波長的一個函數。大於 1.0 的激發值將具有能量增益。

比例係數(S) 1.0000

	波長	轉換效率	縮放效率
1	380.00	0.030000	0.030000
2	400.00	0.070000	0.070000
3	420.00	0.460000	0.460000
4	440.00	0.720000	0.720000
5	460.00	0.790000	0.790000
6	480.00	0.800000	0.800000
7	500.00	0.800000	0.800000
8	520.00	0.570000	0.570000
9	540.00	0.200000	0.200000
10	560.00	0.010000	0.010000
11	580.00	0.000000	0.000000
12	600.00	0.000000	0.000000
13	780.00	0.000000	0.000000
資料結尾			

圖 4-14 激發光譜頁籤

量子產率是吸收的光子轉換為發光光子的絕對轉換效率，是激發波長的一個函數。大於 1.0 的量子產率值將具有能量增益。

比例係數(S) 1.0000

	波長	產率	縮放產率
1	380.00	0.050000	0.050000
2	400.00	0.100000	0.100000
3	420.00	0.600000	0.600000
4	440.00	0.900000	0.900000
5	460.00	0.950000	0.950000
6	480.00	0.920000	0.920000
7	500.00	0.880000	0.880000
8	520.00	0.600000	0.600000
9	540.00	0.200000	0.200000
10	560.00	0.010000	0.010000
11	580.00	0.000000	0.000000
12	600.00	0.000000	0.000000
13	780.00	0.000000	0.000000
資料結尾			

圖 4-15 量子產率頁籤

激發光譜和量子產率兩個頁籤都有比例係數選項可以設定，比例係數可直接

修改數據的絕對值，但不會造成相對的形狀改變。比例係數可用在若使用的數據已經被歸一化，而需要轉換成絕對值數據時，先將歸一化的數據輸入至 LightTools 的頁籤，在設定比例係數使其與目標峰值相等。

在第五章的模型中，所採用的激發光譜是利用 LightTools 中，個人偏好>光譜區，輸入高斯半高全寬與中心波長後，得到的平滑數值，再複製至吸收光譜而得，而半高全寬與中心波長是由物理學報所提供的圖形目測而得。

四、發射光譜:

發射光譜用以定義各吸收波長的放射光光譜。圖 4-16 為包含發射光譜數據的頁籤。此數據可以手動方式輸入或藉由文件檔載入。



圖 4-16 發射光譜頁籤

發射光譜頁籤的每一行數據代表在特定吸收波長時，各放射波長所對應的發射光譜。若要插入新的發射光譜可以於行中的第一欄，點擊右鍵並選擇插入行，如圖 4-17 所示。



圖 4-17 插入一個新的發射光譜

在預設情況下，若吸收波長在頁籤中沒有相對應的發射光譜時，LightTools 會以最接近的吸收波長所對應的發射光譜套用於當前光線。若啟用光譜曲線(欄)之間的內插選項時，LightTools 會在每個間距中內插光譜，而當前光線將使用最接近的內插光譜。

在第五章的模型中，所採用的發射光譜是利用 LightTools 中，個人偏好>光譜區，輸入高斯半高全寬與中心波長後，得到的平滑數值，再複製至吸收光譜而得，而半高全寬與中心波長是由物理學報所提供的圖形目測而得。

五、未轉換的密度分布:

光線被螢光粉吸收再放射為等向的作用。若光線打到螢光粉粒子卻未被吸收，並離開粒子，則依未轉換光線的密度分佈定義，可由螢光粉粒子的控制頁籤中進行設定。

此設定有 4 個選項，如圖 4-18 所示。系統預設的選項為等向:即散射的能量在各方向皆相同。若選擇未偏離選項，則光線穿過粒子將視為無任何的作用。此選項可用於模擬螢光染料，例如雷射與太陽能的應用。



圖 4-18 為偏轉光線的密度分布選項

若選擇根據 Mie 理論，密度分佈會根據 Mie 氏解計算。若平均自由程已選擇使用根據 Mie 理論計算，則會以相同的輸入來計算未轉換密度分佈。

最後一個選項為使用者自訂，此項目允許手動設定密度分佈。此選項可用於輸入量測的分佈。強度為波長與角度的函數可在未轉換的強度頁籤中設定，如圖 4-19 所示。



圖 4-19 設定使用者自訂強度分布

表格的組成方式以每個波長為一行和每個角度為一列，角度相對於未偏折方向的說明，如圖 4-20 所示。

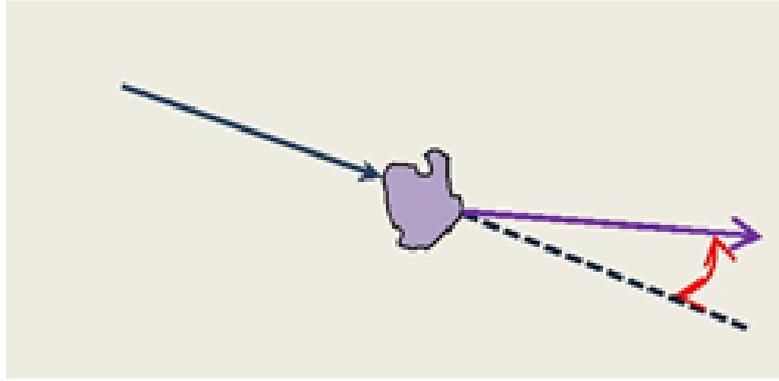


圖 4-20 未轉換密度的散射角度圖示

在第五章的模型中，未轉換的密度分布為根據 Mie 理論所決定。

六、粒子產生的光線數:

最後一項必需要考慮的設定為螢光粉粒子控制頁籤中的或然率分光，如圖 4-21 所示。系統的預設情況下，LightTools 會由粒子傳播出一條光線，若未發生轉換，則該光線為未轉換光線。若有發生轉換，LightTools 會用機率方式決定光線為轉換光線或未轉換光線。若此選項未勾選而發生轉換，則會有兩條光線從粒子傳播出來：即轉換光線與未轉換光線。勾選此選項時，會以較少的光線通過系統，增加光線追跡的速度。



圖 4-21 或然率分光選項可以控制有多少光線從螢光粉粒子傳播出來

在第五章的模型中，有勾選此項目。

第五章 LED 中螢光粉特性模擬

本章所使用的模型主要是參照光寶 LTW-5630 系列的產品(圖 5-1)及學報[6]中所要求的參數，做為設計模型時的參數。整體的尺寸為 3.0mm×5.6mm×1mm。晶片尺寸為 2.2mm×3.8mm×0.15mm。晶片的折射率為 1.5。封裝膠的折射率為 1.5。螢光粉粒子的折射率為 1.8。LightTools 中的模型如圖 5-2 所示。當建構完成模型後更改材料為含螢光粒子之材料，而螢光層的參數設定依 4-6.3 節所示。



圖 5-1 光寶 LTW-5630 產品圖

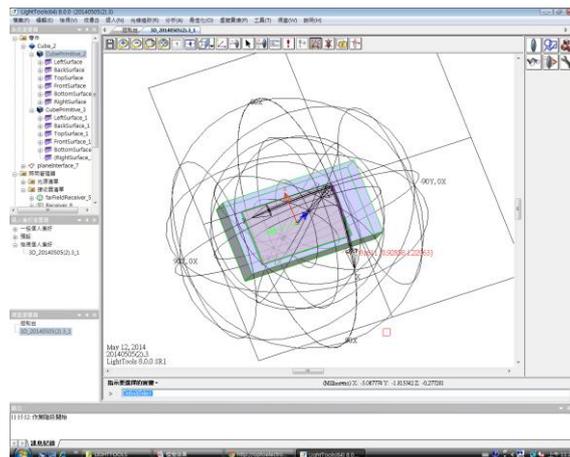


圖 5-2 LED 外觀模擬圖

5-1 螢光粉濃度對散射特性的影響

設定螢光粉粒徑為 500nm，改變螢光粉濃度，觀察在不同濃度下白光 LED 相關色溫的變化與散射光分布情況，得到結果如圖 5-3、圖 5-4 所示。

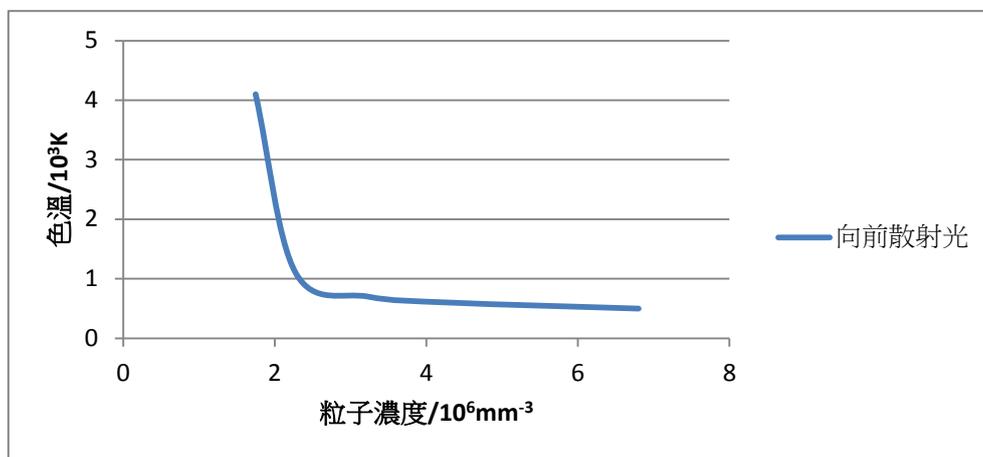


圖 5-3 色溫與濃度關係圖

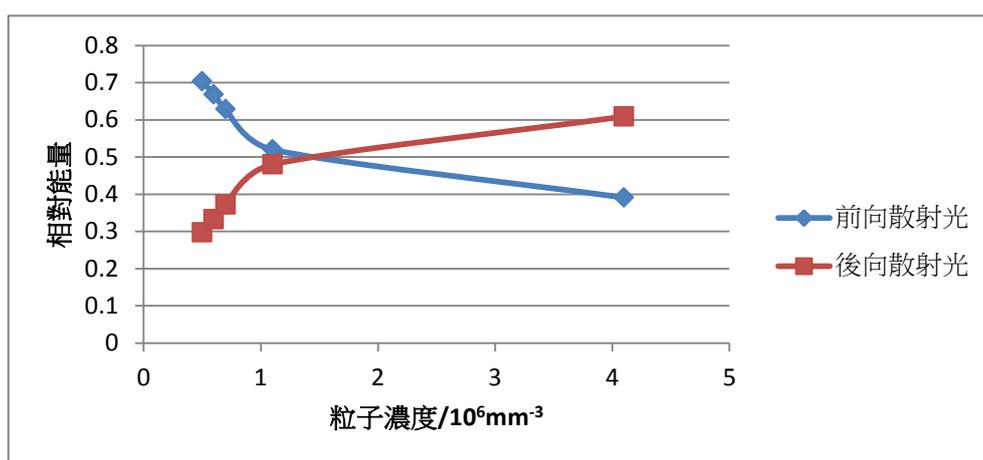


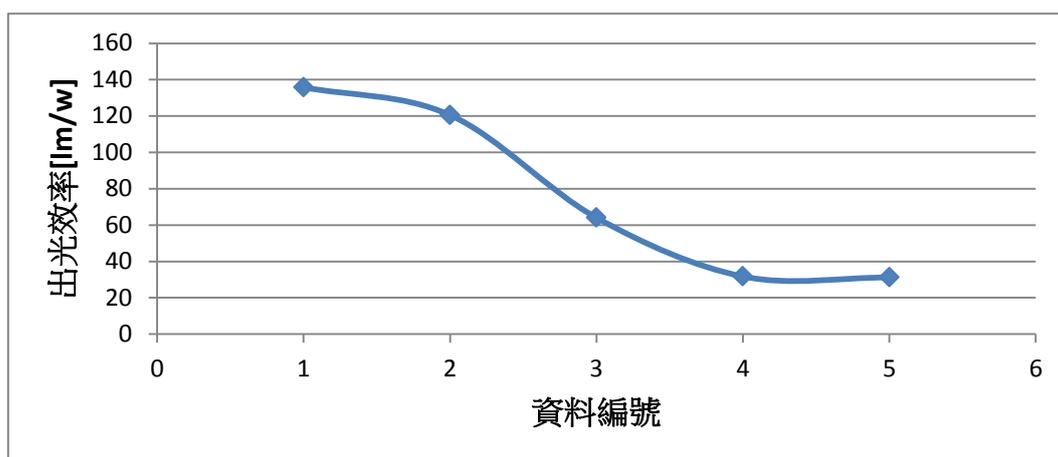
圖 5-4 濃度與散射光能分布關係

由圖 5-3、圖 5-4 可以看出:隨著螢光粉濃度增加，晶片的藍光轉換成黃光的比例增加，使得初光色溫逐步降低，同時光散射作用也更加強烈，前向散射光的相對能量逐漸降低，而後向散射光則不斷增加。

在實際的封裝中，總出光量是前後向光的總和，因此對後向光的處理將關係到出光的效率。

5-2 螢光粉散射特性對出光效率的影響

螢光粉折射率通常表示為 $n = n_1 + in_2$ ，其中 n_2 為螢光粉折射率虛部，他將直接影響白光 LED 的轉換效率。如圖 5-5 所示，我們模擬了不同的 n_2 值對出光效率的影響，此時固定顆粒半徑為 $10\mu\text{m}$ 、螢光粉顆粒濃度為 6900mm^{-3} ，所的結果如圖 5-5 所示。



資料編號	折射率虛部	出光效率 [lm/w]
1	10^{-5}	135.81
2	10^{-4}	120.52
3	10^{-3}	64.035
4	10^{-2}	31.713
5	10^{-1}	31.167

圖 5-5 螢光粉折射率虛部對出光效率的影響

白光 LED 的出光效率理論上，粒徑的不同並不會造成轉換效率的變化，但由於 Mie 散射的存在，使得激發光的前後向分布不同進而造成損耗。圖 5-6 為不同粒徑下出光效率隨色溫的變化。實驗參數的不變量為厚度 0.1mm 。

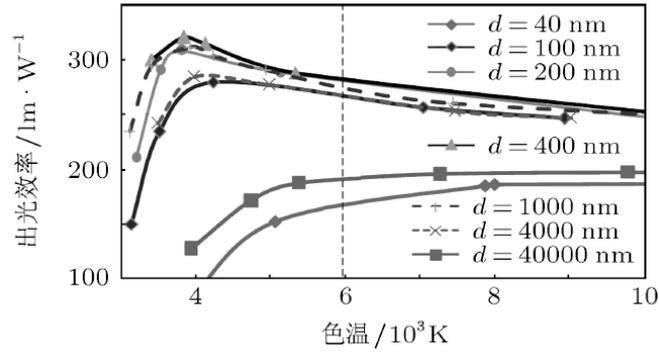


圖 5-6 不同粒徑下光效隨色溫之變化

由圖 5-6 可知，不同粒徑下，光效隨色溫之變化趨勢相同，先上升後下降。但不同粒徑間，平均的出光效率卻不具規律性，這是因為：粒徑越小時，雖然螢光粉的吸收與激發作用增加，但 Mie 散射的前向散射光將越弱故有此現象。

5-3 螢光粉散射特性對空間色溫分布的影響

由於螢光粉的粒徑大小直接影響了散射作用，因此必然會對 LED 中藍光與黃光的混合作用產生影響，也就會影響最後 LED 在空間各角度的一致性。圖 5-7 為空間色溫分布與粒徑之關係。實驗設定為不同粒徑下平均色溫需固定於 6000K。

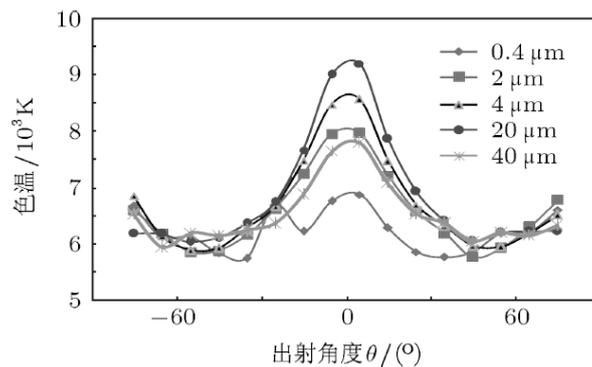


圖 5-7 空間色溫分布與粒徑之關係圖

由上圖可見：空間色溫分布呈現相同規律，零度方向色溫最高，隨著角度增大色溫逐漸降低。同時也可以看出：螢光粉粒子越小，空間色度一致性越好。主要原因為粒子越小，散射作用越強，使藍光與黃光的混合更加充分。

第六章 結論與展望

本論文根據 Mie 散射理論，利用軟體進行螢光粒徑對光散射作用的影響，分析了：

- (一)前後向散射光比例與散射的關係。
- (二)粒徑大小對發光效率的影響，主要原因為：粒徑大小會直接影響散射光特性。
- (三)粒徑對於空間色溫分布的影響：粒徑越小，空間色度的一致性越好。

了解影響發光效率與空間色度的原因後，在實際的操作上我們就能夠更有效率的進行調配，如此一來即達成了本文的目的。

參考文獻

- [1] 中華民國光電協會，LED 工程師基礎概念與應用，初版，台北市:五南，2012.04。
- [2] 陳隆建，LED 元件與產業概況，初版，台北市:五南，2014.09。
- [3] LIN, SHI MU, *Development of Laser Scattering Techniques to Measurement of Particle*, Department of Physics University of Reading, June, 1996.
- [4] 李家德，手提式 LED 量測系統分析，碩士論文，國立台北大學光電工程研究所，台北，2013。
- [5] 思渤科技，【技術文章】LightTools 的螢光粉模擬_建立準確的白光 LED 模型。
- [6] 錢可元、馬駿、付傳、羅毅，基於 Mie 散射理論的白光發光二極管螢光粉散射特性研究，物理學報，清華大學深圳研究生院，深圳，2012。